高校レベルから大学レベルまでの
電磁気学

書き込み式ノート，Ver. 2

担当：綴木　馴

●クーロンの法則（電気質量）

物質は全て多数の原子から構成されている.

原子は陽子と中性子からなる原子核のまわりに電子が結合した構造をなしている.

陽子は正，電子は負の電荷を持ち，
中性子は電荷を持たない.

電子と陽子の電荷は大きさが等しく，

$e = 1.6021892 \times 10^{13}$ C（クーロン） である.

●クーロンの法則（電気質量）

$$e = 1.6021892 \times 10^{13}\ \mathrm{C}$$（クーロン）

これを電気容量という.

物体の帯電は陽子と電子の数の過不足によって生じるので
物体のもつ電荷は常に e の整数倍でなければならない.

しかしeは巨視的なスケールから見ると非常に小さいので
巨視的な現象（通常の計算）では
電荷は連続に変わりうると見なして良い.

●クーロンの法則（電荷の単位系）

本テキストではMKSA単位系（東京大学系）を用いる.

m(メートル), kg(質量）, sec(秒）, A(アンペア）

ちなみにcgs単位系（京都大学系）も存在する.

cm（長さ）, g（グラム）, sec（秒）

これまで京大と東大が対立してきた背景があったが
国際基準単位系がMKSA単位系になりつつある為
本テキストでもMKSA単位系を用いる.

●クーロンの法則（電荷の単位系）

MKSA単位系での電荷の単位はクーロンで,
1アンペア（A)の電流が1s間に運ぶ電荷量として
定義される.

●クーロンの法則（点電荷）

微少な物体が帯電しているとき,
物体の大きさに比べて
十分遠くからみると,
電荷の広がりを
電荷の広がりを無視することができる.
この様な電荷を点電荷という.

●クーロンの法則（クーロンの法則）

電荷の間には，電荷が同符号のとき斥力（せきりょく）異符号のとき引力がはたらく．

図1-1

(a)

(b)

●クーロンの法則（クーロンの法則）

両者を結ぶ直線の方向を向き，大きさ［　　］は，
電荷を［　　　　］，電荷の距離を［　　］として，真空中で

［　　　　　　　　］

［　　　　　は斥力，　　　　は引力を表す.］

ここで，

を**真空の誘電率**という.

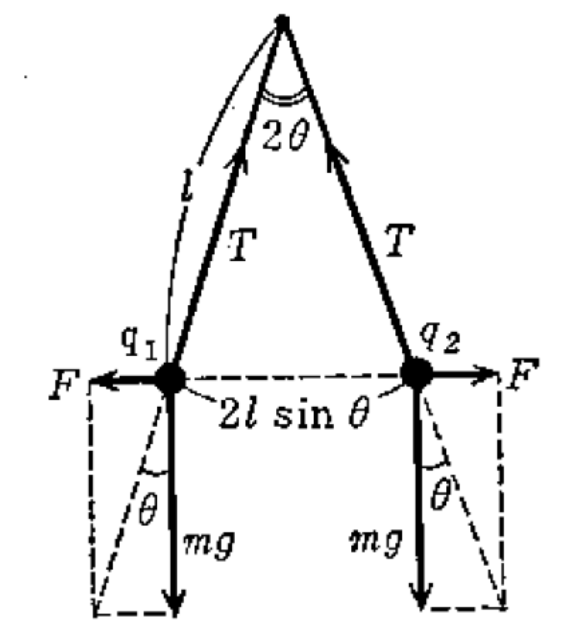
●例題1-1-1

大きさの等しい質量 m の2個の小球にそれぞれℓ の糸を付けて同じ点からつり下げ，おのおのの小球に正電荷 q_1 ， q_2 とθの間に成り立つ関係を求めよ.

（解）右図のように小球間の距離が $\boxed{}$ であるから，小球間に働くクーロン力の力の大きさF は

$$\boxed{\phantom{F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 (2\ell\sin\theta)^2}}} \quad (1)$$

と表される．このクーロン力F は重力mgと糸の張力Tと互いに釣り合っている.



●例題1-1-1

そこで，釣り合いの式を書くと，

水平方向：F＝

鉛直方向：mg＝

となり，これらの式からTを消去して，

を得る．(2)

したがって，(1)，(2)式により，

$q_1 \ q_2 =$ (3)

●例題1-1-2

例題1-1-1における2個の小球をいったん接触させてから再び離したら，糸の開きが2 θ'になった． $q_1 \neq q_2$ならば，$\theta' > \theta$ になることを示せ．

（解）　2個の同じ大きさの小球を接触させると，一方から他方へ電荷が移動し，両球とも同量の電荷 $\boxed{\qquad\qquad}$ を持つようになる． このとき，小球間のクーロン力の大きさF’は，(1)式の右辺において q_1 と q_2 を $\boxed{\qquad\qquad}$ に，θ を θ'にそれぞれ置き換えたものに等しい． また(2)式と同様に，つり合いの式から

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$ が成り立つ．

●例題1-1-2(続き)

よって,

(4)

となる. $q_1 \neq q_2$ のとき, の不等式が成り立つので, (3)式と(4)式から

(5)

となる. のとき, はθの単調増加関数である.
ゆえに(5)式の不等式から を得る.

●ベクトル（ベクトルとスカラー）

力や運動量の様に，大きさと向きを持つ量を
ベクトルと言う.

これに対し，質量やエネルギーの様に，
大きさだけを持つ量をスカラーと言う.

このテキストでは，ベクトルを $\boxed{}$ などのように
太文字で表す.

●ベクトル（ベクトルの成分）

ベクトルは図1-2の様に座標軸を選び,
成分で表すこともできる.

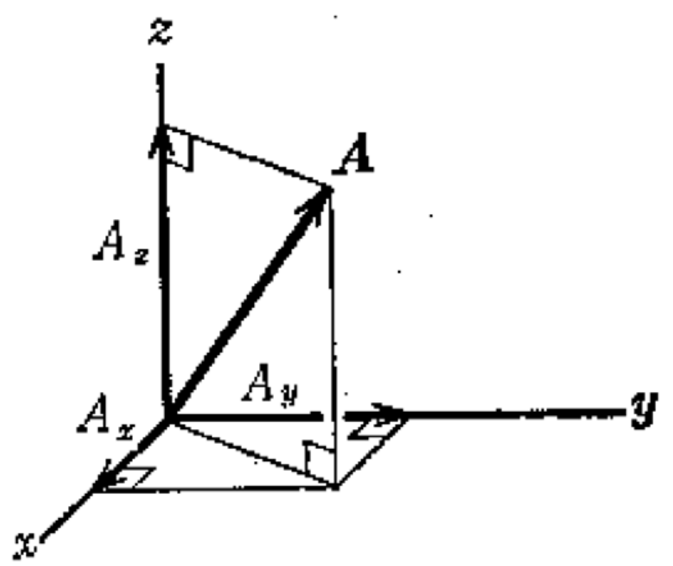


図1-2

この時ベクトルの大きさ　　は

●ベクトル（ベクトルの和）

2つのベクトル　　　の和　　　は，図1-3の様に「平行四辺形の規則」により定義される.

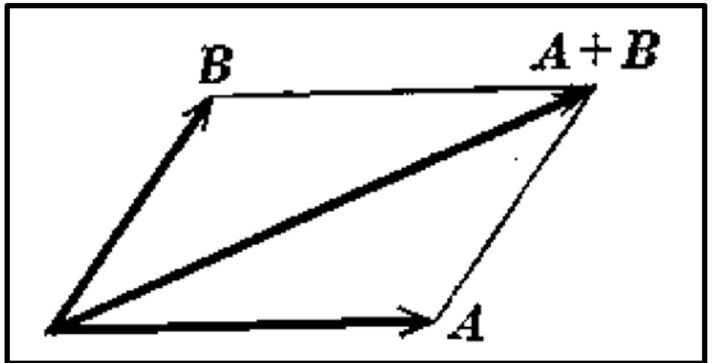


図1-3

の様にそれぞれ成分で表すと，

●ベクトル（スカラー積「内積」）

2つのベクトル　　　のスカラー積　　　　は
次の様に定義される．2つのベクトルのなす角をθとすれば，

成分で表すと

スカラー積は席の順序を変えても値は変わらない．

また分配の法則が成り立つ

●ベクトル（ベクトル積「外積」）

2つのベクトル［　　］のベクトル積［　　］は次の様に定義される.

大きさが，［　　］

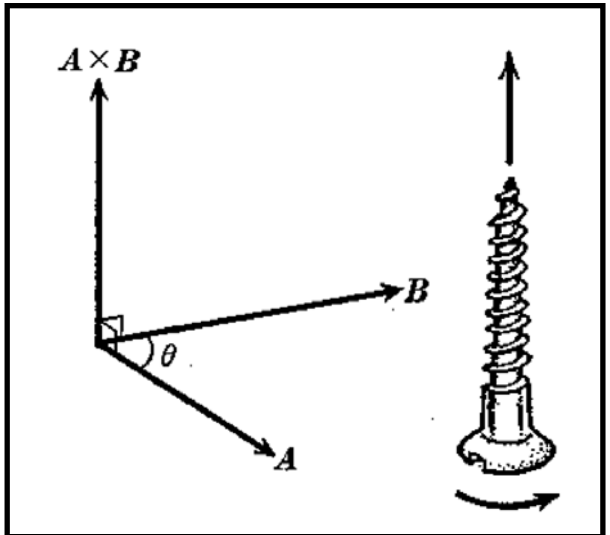


図1-4

のベクトルで，向きは［　　］の両方に垂直で，［　］から［　］に向けて回転する右ねじが進む方向を向く(図1-4)

成分で表すと［　　］

●ベクトル（基本ベクトル「単位ベクトル」）

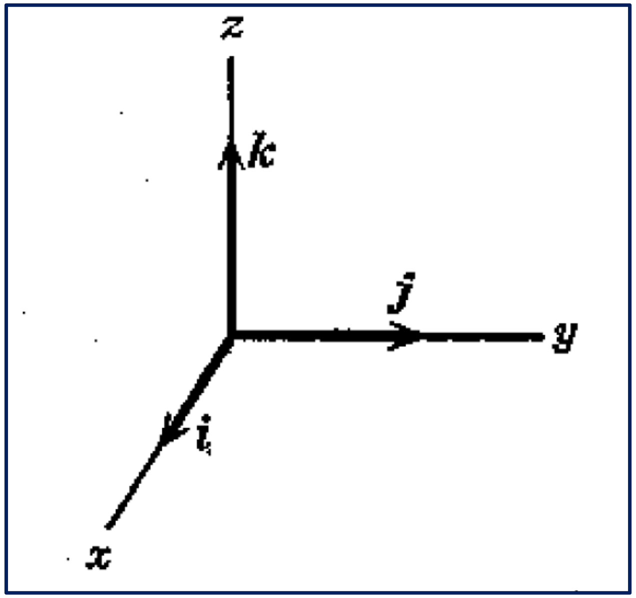
x, y, z軸の方向を向いた大きさ1のベクトル
(単位ベクトル)　を基本ベクトルという.

基本ベクトルには次の性質がある

●ベクトル（一般のベクトル）

一般のベクトル$\boxed{}$の成分は基本ベクトルを用いて次の様に表される.

$\boxed{}$

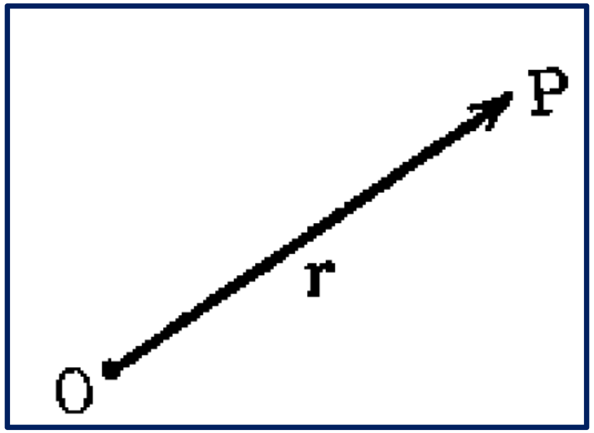


また，$\boxed{}$ は基本ベクトルと成分によって次の様に表される.

$\boxed{}$

●重ね合わせの原理（位置ベクトル）

空間のある点Pの位置を表すのに，
原点Oを選び，OからPに向けて引いたベクトル[ ]を位置ベクトルという．



座標軸を選び，[ ]をその成分[ ]で表したものが座標である．

空間の2点[ ]と[ ]の距離は

[ ]

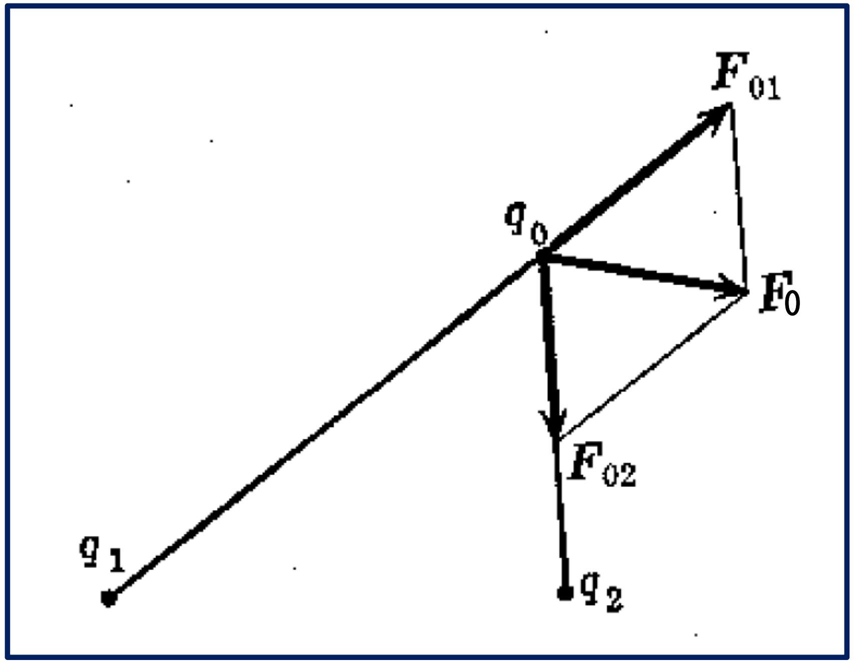
●重ね合わせの原理（ベクトルで表したクーロンの法則）

点電荷　　がそれぞれ　　　にあるとき，
　　から　　に働く力　　　は

この力について作用反作用の法則が成り立つ．

●重ね合わせの原理（力の重ね合わせの原理）

2つの電荷　　　があるとき，
もう一つの点電荷　　　に働く力
　　　は　　　だけがあるときの力
　　　と，　　　だけがあるときの
力　　　の和に等しい．



点電荷が多数ある場合も，
同様に**力の重ね合わせの原理**が成り立つ

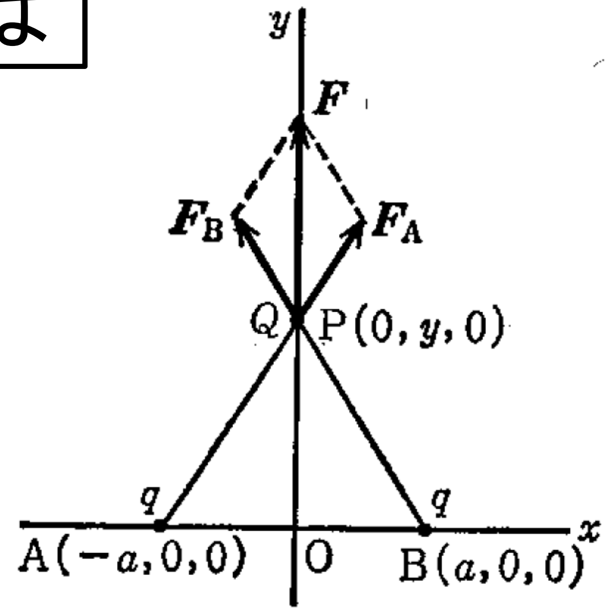
●例題1-3

点Ａ (−a, 0, 0) および点Ｂ (a, 0, 0) にそれぞれ等質の点電荷ｑを置いたとき，点Ｐ (0, y, 0) に位置する点電荷Ｑが受ける力Ｆを求めよ．ただし，ｑとＱは同符号とする．

(解) 点Ａから点Ｐへ引いたベクトル $\mathbf{r}_{PA}$ は

と表され，その大きさ（絶対値）は

と与えられる．



●例題1-3

したがって，点電荷Ｑが点Ａの点電荷ｑから受ける力$\mathbf{F}_A$は，

となる．同様に，点Ｂから点Ｐへ引いたベクトル$\mathbf{r}_{PB}$は，

と表されるので，Qが点Bのｑから受ける力$\mathbf{F}_B$は，

●例題1-3

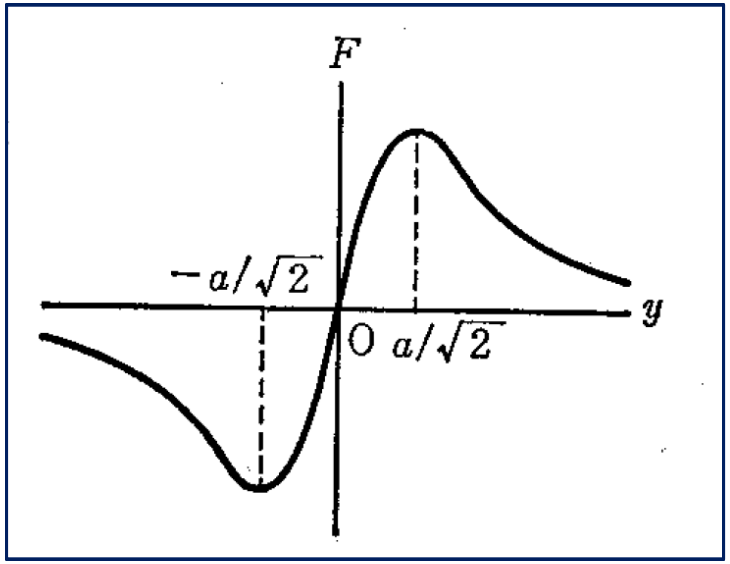
よって，F_AとF_Bを重ね合わせると，

を得る．Fはｙ>0のときy軸の正の向き，
ｙ<0のとき負を向いている．また，
Fの大きさ

をｙの関数としてグラフに表すと次ページの様になる．

●例題1-3

Fが最大になるのは,



により,

のときである.

●点電荷の作る電場（電場）

電場：近接作用の立場では，電荷の間に働く力は，まわりの空間に生じた変化（空間の歪み）によって伝わるものと見なされる．

電荷をおいたとき，そのまわりに生じる空間の変化を電場（工学的には電界）という．

クーロンの法則によると，電荷qに働く力 **F** はqに比例する．したがって，

●点電荷の作る電場（電場）

Ｅは電荷qをおいた点の電場の強さをあらわすベクトルで，これを電場ベクトル，または，単に電場と呼ぶ.

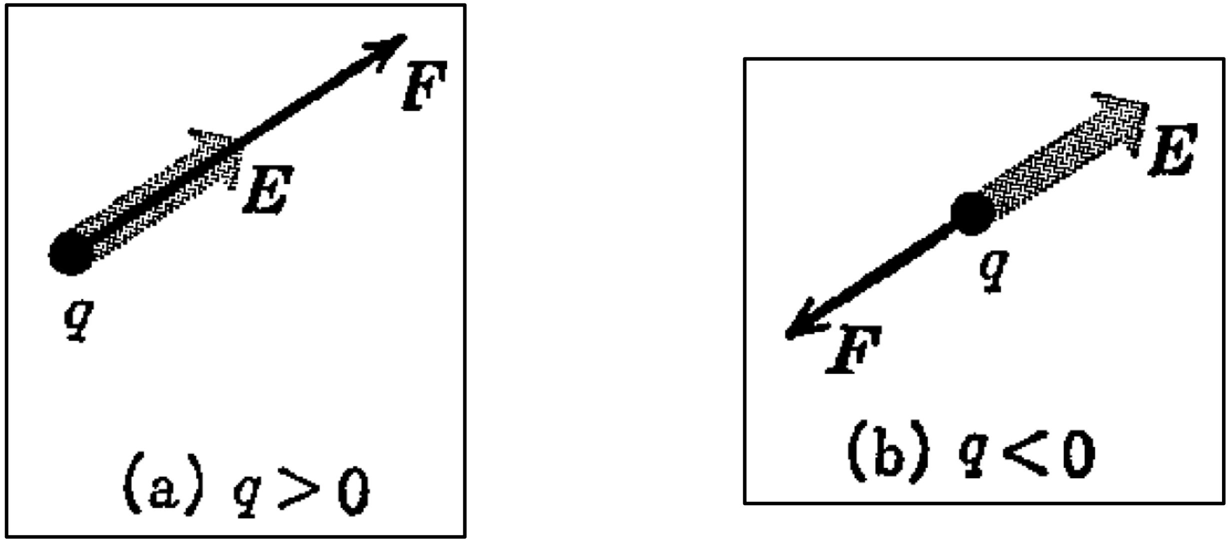


図2-1電場の中におかれた電荷に働く力

●点電荷の作る電場

q_2からq_1に働く力$\mathbf{F}_{12}$ と

電荷に働く力の式

により，点 $\mathbf{r}_1$にある点電荷q_1が点 $\mathbf{r}$ に作る電場は

（2．2）

●点電荷の作る電場

(2．2)

成分に分けて表すと，$\mathbf{r}=(x,y,z)$，$\mathbf{r}_1=(x_1,y_1,y_1)$として
x成分は

y，z成分も同様にあらわせれる.

●重ね合わせの原理

点電荷が2個以上あるときに生じる電場は,
力の重ね合わせの原理により, 各電荷がつくる電場の和になる

点電荷q_1, q_2, ..., q_nがそれぞれr_1, r_2, ..., r_nにあるとき
r に生じる電場は, q_iが作る電場をEi(**r**)とすれば

●電荷密度

電荷が空間的に連続的に分布しているとき，点 **r** のまわりの微少な体積 ΔVに Δ qの電荷があるとする. これを,

と書くとき ρ (**r**)を電荷密度という

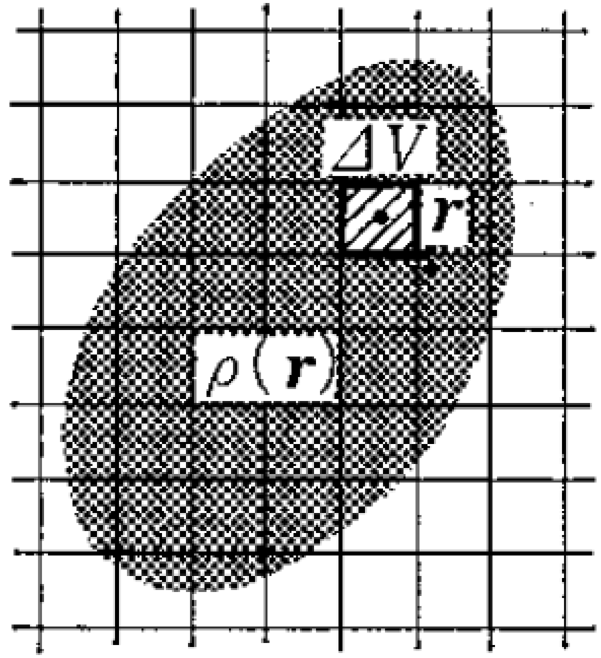


図 2-2　電荷の連続的な分布

●連続分布する電荷のつくる電場

ΔVを十分小さくとれば，各微少体積にある電荷を点電荷と見なし，重ね合わせの原理を使うことができる.

ΔV→0の極限でΣ(和)は∫(積分)になる.

したがって，空間に密度$\rho(\mathbf{r})$で連続的に分布する電荷が点$\mathbf{r}$につくる電場は

積分は3次元の体積分を表す. 直交座標をとり，$\mathbf{r}'=(x', y', z')$とすれば$dV'=dx'dy'dz'$でx', y', z'についての3重積分になる.

●連続分布する電荷のつくる電場

3重積分には幾つかの表し方がある.
いずれも同じ意味である.

●連続分布する電荷のつくる電場

電荷が線上に線密度 $\lambda(\mathbf{r}')$ で分布しているとき,
生じる電場は線積分で表され,

電荷が面上に面密度 $\sigma(\mathbf{r}')$ で分布しているとき,
生じる電場は面積分で表され,

となる.

●電気力線

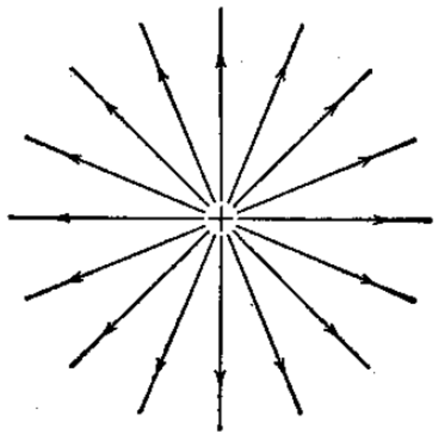
電場の中で点を，つねにその位置の電場の向きに動かす，
という約束で動かすとき，その点の描く向きに付いた曲線を
電気力線という．
電気力線は接線がその点の電場の向きを表す．

電気力線は正の電荷（または無限遠）から出て，
負の電荷（または無限遠）で終わる．

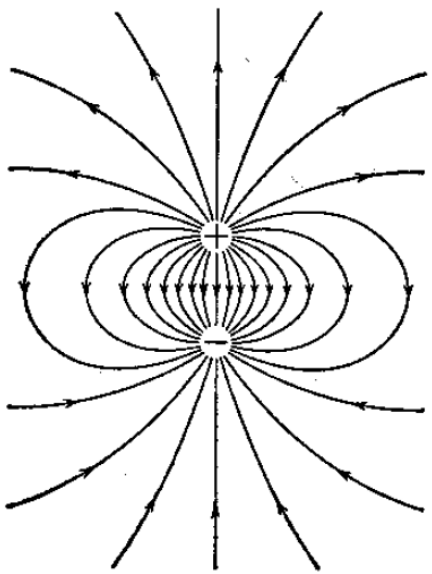
途中で切れたり，2つに分かれたり，交差することは無い．

●電気力線の密度

電気力線に垂直な微少面積ΔSを考え，そこを貫く，
電気力線の数をΔNとするとき，
比ΔN/ΔSを電気力線の密度という.



(a)1個の正の点電荷



(b)正負の点電荷の対

●電荷，電場と電気力線

電気力線は，次の約束にしたがって引くものとする．

1．正の電荷から出る数，負の電荷に入る数は，
電荷の大きさに比例する．

2．密度はその点の電場の強さに比例する．

電気力線とは電場を可視化したものと考えて良い．

●ガウスの法則（電気力線の保存）

空間に閉じた曲面(ガウスの袋)を貫く電気力線を,
内から外へ出るものを正, 外から内に入るものを負と数える
と約束する.

また, 電荷を出る電気力線は正に,
電荷に入る電気力線は負と考える

この時, 曲面(ガウスの袋)を貫く電気力線の総数(代数和)は
曲面の内部にある電荷を出る電気力線の総数(代数和)に
等しい. 曲面の形によらない→曲面を好きに作って良い.

●ガウスの法則

電気力線の代わりに電場と電荷を用いて表せば次の様になる

任意の閉じた曲面(ガウスの袋)Sについて

n(r)は曲面上の点rで面に垂直な,
外向きの単位ベクトル(法線ベクトル)で,
積分は電場に垂直な, 外向きの成分

を曲面S全体に渡って
積分することを示す.

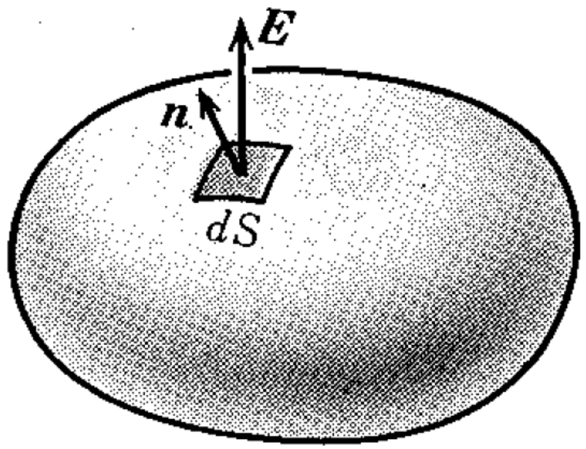


図 2-4　ガウスの法則の面積分

●ガウスの法則

$\boxed{}$ は曲面の内部にある電荷についての和である.
これを(積分形の)ガウスの法則という.

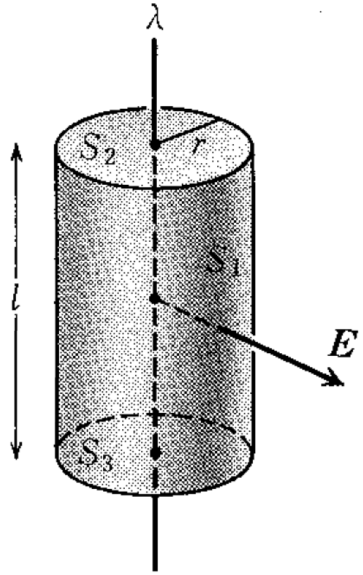
電荷が密度 ρ (r)で連続的に分布しているときのガウスの法則は

右辺の積分は平曲面Sで囲まれた領域Vの全体に渡って積分することを示す.

●例題2.5

無限に長い直線上に一様な線密度λで電荷が分布しているときガウスの法則を用いて，生じる電場を求めよ.

解　電荷分布の対称性から，電場は電荷の分布に直線に垂直に放射状に生じ，その強さは直線からの距離rだけに依存することが分かる. そこで，ガウスの法則を適用する閉曲面Sとして，右図の様に直線を軸とする半径r，長さlの円筒面をとる



この円筒面（閉曲面のこと）は，側面S_1，上底面S_2，下底面S_3から成るので，閉曲面Sについての電場**E**の面積分は，

●例題2.5

下記の様に3つの式に分けられる.

しかし, S_2,S_3の上下の底面では電場は面に平行で, 面に垂直な成分が0だから, S_2,S_3についての面積分は0になる.

一方, S_1上では, どの点においても電場は面に垂直であり, その強さE(r)が同じだから, **E**(r)・**n**(r)はE(r)に等しく一定の値をとる. したがって, S_1についての面積分はE(r)にS_1の面積$2\pi rl$を掛けたものになる.

●例題2.5

ゆえに,

ガウスの法則によれば，上式は閉曲面Sの内部に含まれる全電荷Qをε_0で割ったものに等しい．Qは長さlの直線上に分布する電荷だからQ=λl. よって,

となり，電場の強さE(r)として,

を得る.

●例題2.6

半径Rの球内に一様な密度 ρ で分布する
電荷がつくる電場を求めよ.（金属ではあり得ない）

（解） 電荷が球の中心のまわりに球対称に分布しているので,
電場の向きは就寝から放射状であり, その強さは中心からの
距離だけの関数となる.

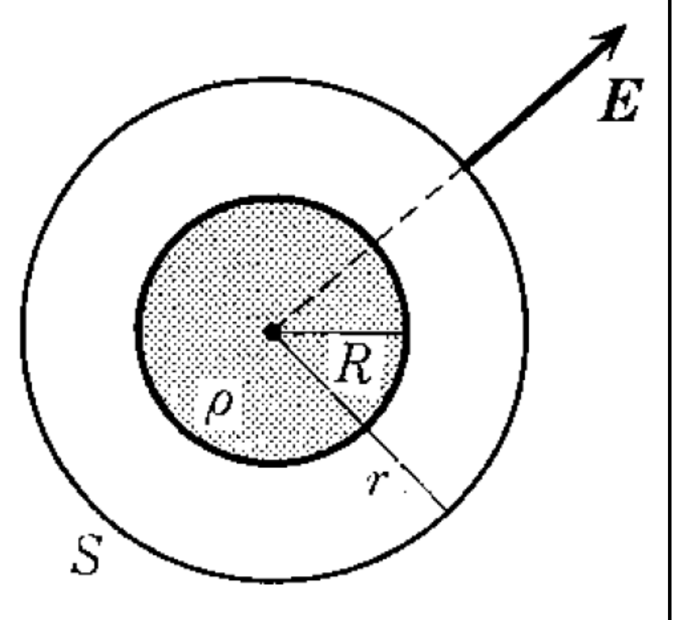


図 1

そこで, ガウスの法則を適用するため,
電荷の分布する球と同じ中心を持つ
半径rの球面Sを考えることにする.

●例題2.6

図1の様に，電場はこの球面上のどの点でも面に垂直である．したがって，中心rの距離にある点での電場の強さをE(r)とすると．球面S上で $\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r}) = E(r)$であり，

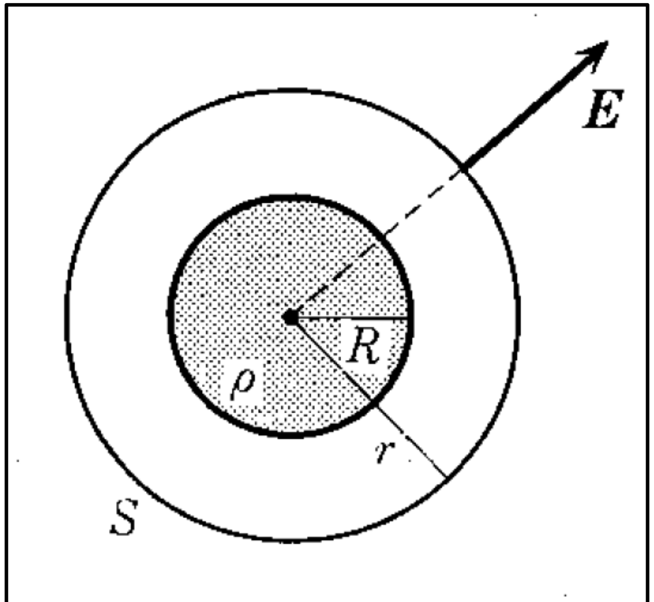


図1

ガウスの法則は以下の様になる

●例題2.6

ガウスの法則の右辺により，この面積分の値は球面Sの内部に含まれる全電荷Qを ε_0 で割ったものに等しく，

となる．よって，電話の強さE(r)は

と与えられる．

●例題2.6

球面Sが内部に含む全電荷Qはrの大きさにより変化する．まず $r>R$ のとき，Qは半径Rの球全体の電荷 $(4\pi R^3/3)\rho$ に等しい．したがって，

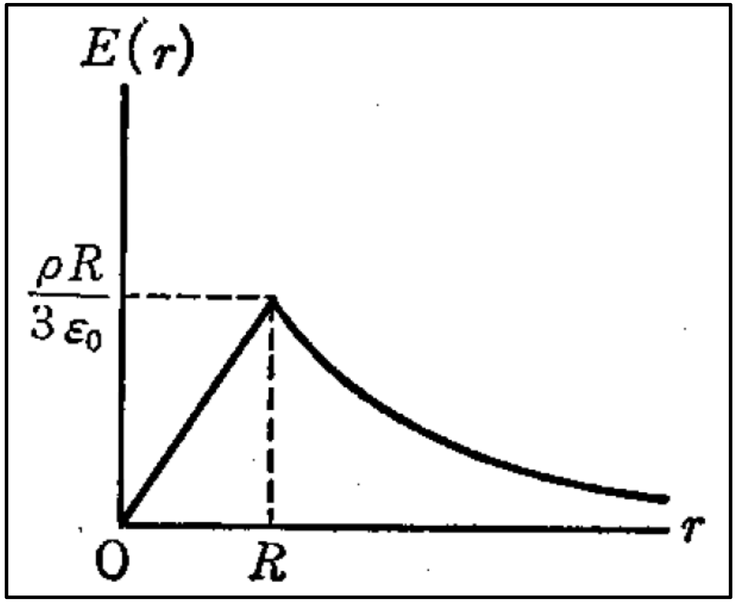
となる．また $r \leqq R$ のとき，$Q=(4\pi r^3/3)\rho$ だから，

となる．

●例題2.6

電場の強さ E(r) を r の関数としてグラフに表すと，右下の図のようになり，r＝R で E(r) は連続であるが，その微分係数が連続では無いことがわかる．

また，r＞R のときは，半径 R の球の全電荷 $(4\pi R^3/3)/\rho$ が中心に点電荷として集まった場合と同じである．



●電位（保存力の条件）

質点が力を受けながら任意の閉じた経路を一回りして元の位置に戻るとき，力が質園になす仕事が0であれば，力学的エネルギーが保存される.

この様な力を保存力という.

電荷の間にはたらくクーロン力も保存力である.

このことから，電場 E について次の式が証明される.

(2.11)

●電位（保存力の条件）

t(r) は経路Cの上の点rで経路に接する単位ベクトル（接線ベクトル）で，積分は電場の接線成分：

を閉じた経路Cに沿って一回り積分することを示す．

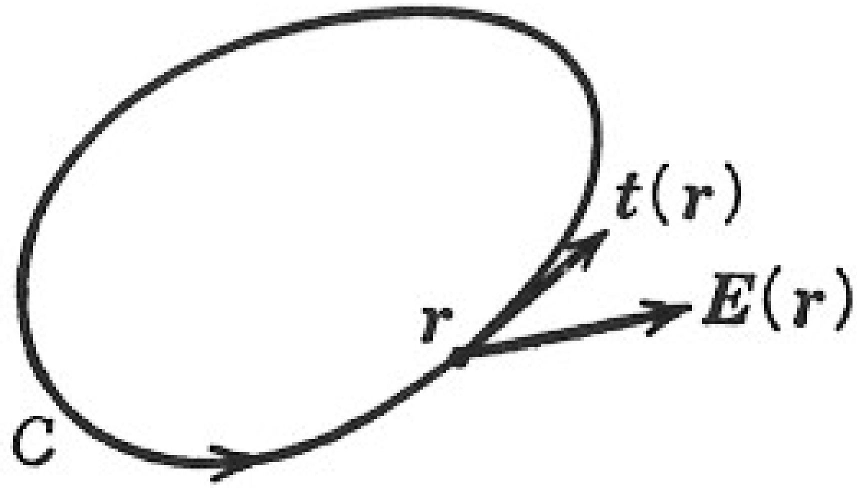


図 2–5　(2. 11)式の積分

●電位

(2.11)式

から次のことが分かる.

空間に基準点Oを選ぶと, Oから点Pにいたる経路に沿う積分

はPの位置**r**の関数としてφ(**r**)とかき, これを電位または, 静電ポテンシャルという.

●電位と仕事

$q\phi(r)$は電荷qをOからPまで移動させるときに要する仕事である

また，$\boxed{}$ は，

qをr’からrまで移動させるときに要する仕事である．

（**問題**）電位の単位は[v]ボルトであるが，
仕事の単位は一般には[J]ジュールである．
[v]と[J]はどのような関係にあるか？
考えて見よ．

●電位（等電位面）

電位が一定の面を等電位面という.

等電位面は，隣り合う面間の電位差が一定になるように描くものとする(図2−6)

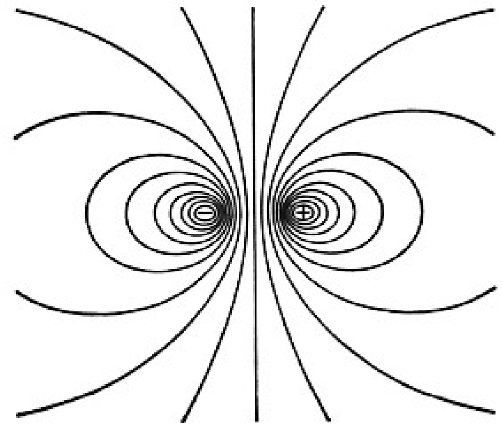


図 2−6　正負の点電荷の対による電場の等電位面

電場は等電位面に垂直で(図2−7)，等電位面が密なところほど強い.

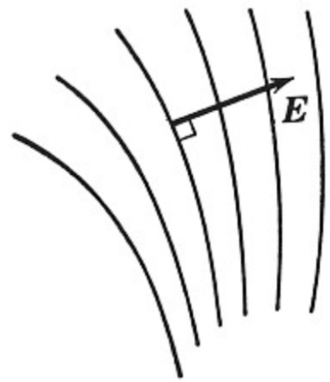


図 2−7　等電位面と電場

●電位（電位と電場の関係）

x方向に微少な距離Δxを隔てるた2点間の電位差をΔφとすれば，電位差と電場の関係は先の式

により，

となる．

したがって，Δx→0の極限をとると，

を得る．

一般に電場E(r)は電位φ(r)から次の関係によって得られる．

●電位（電位と電場の関係）

一般に電場E(r)は電位φ(r)から次の関係によって得られる.

はナブラと読み，ベクトル演算子

である.

をφ(r)の勾配(gradient)と言う.

●電位（電荷分布と電位）

1個の点電荷q_1が点$\mathbf{r}_1$にあるとき，無限遠を基準とする点$\mathbf{r}$の電位は，

電位についても重ね合わせの原理が成り立つ．よってn個の点電荷q_1, q_2，…q_nがそれぞれ$\mathbf{r}_1$，$\mathbf{r}_2$，…$\mathbf{r}_n$にあるとき，無限遠を基準とする点$\mathbf{r}$の電位は，

●電位（電荷分布と電位）

電荷が密度 ρ (r)で連続的に分布している場合は,

●電位（電位と電場の単位）

1[C]の電荷を移動させるときに要する仕事が1[J]であるような2点間の電位差を1ボルト[V]という. 1[m]へだてた2点間の電位差が1[V]であるような電場の強さを1[V/m]という.

エネルギーの単位: $J = N \cdot m = m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$

仕事率の単位: $W = J/s = m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$

電圧または電位の単位: $V = W/A = m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}/A$

●例題2.7(1)

電位ϕ(r)と電場E(r)の間の関係式E(r)＝−∇ϕ(r)を用いて，
次の問いに答えよ.
(1)電場は等電位面に対して垂直であることを示せ.

(解）ある等電位面に，任意の2点r = (x, y, z)と
r + Δr = (x+Δx, y+Δy, z+Δz)を選ぶと，

$\phi(x, y, z) =$ となる.

この式はΔrの各成分Δx，Δy，Δzを十分小さくしても成り立つ

そこで，右辺をそれらについて1次の項まで展開することにより

●例題2.7(1)

$$\phi(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - \phi(x,\ y,\ z)$$

を得る. よって, 電場ベクトルE(r)と等電位面上にある任意のベクトル Δ rとのスカラー積が0だから,
電場は等電位面に対して必ず垂直である.

●例題2.7(2)

点電荷qが原点に置かれているとき, 点**r**=(x, y, z)における電位は,

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

と与えられる. この $\phi(\mathbf{r})$について, $E(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$を計算せよ

$r=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ と置き, rのxについての偏微分を計算すると, y, zを定数と見なして,

$\boxed{}$ となる

●例題2.7(2)

したがって，$\mathrm{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$のx成分は，

$\mathrm{Ex}(\mathbf{r}) =$

これは，クーロンの法則で与えられる，x成分の表記に他ならない．y，z成分についても同様である．

●微分系ガウスの法則

積分系のガウスの法則を，微少な領域に適用することにより，次の様に書き直すことが出来る.

(3.1)

ただし，この式の左辺は

と表し，これをEの発散(divergence)という. これはベクトル演算子▽とEのスカラー積とみることができる.

●ガウスの定理

(3.1)式を任意の閉曲面Sで囲まれた領域Vに渡って積分することにより過去に以下の式を導いた.

このとき, (3.1)式と上式を組み合わせることにより, 以下の式が導ける.

これを**ガウスの定理**と呼ぶ.

●微分系の保存力の条件

微分系の保存力の条件は,

であった.

微少な閉じた経路に適用することにより, 次の微分系の法則に書き直すことができる.

この式の左辺は成分に分けて書くと,

であり, これをEの回転(rotation)という.

●静電場の基本法則

微分形で書いた静電場の基本法則は次の2式である.

●ポアソン方程式

より，電場E(r)は電位φ(r)を用いて，

上式を

に代入することにより，

電位φ(r)に対する方程式が次の様に得られる．

この式をポアソン方程式と呼ぶ．

ただし，

演算子∇^2はΔともかき，ラプラシアンとよぶ