応用数学Ⅱ：書き込み式ノート

フーリエ解析とその応用

（知能機械学科，バージョン3）

担当：綴木　馴

●今までの電気回路

→ 直流(direct current)と交流(alternating current)

交流といっても特に正弦波形の交流回路を扱ってきた

６０Hzの正弦波形は中国電力が苦労して作っている

→ 中国電力が優秀だからできる.

でも一般には，ひずみ(distortion)が混ざる.

図

●ひずみ派の解析法(フーリエ解析)と周期関数

ひずみ派を解析する方法にフーリエ解析がある.

フーリエ解析は電気回路のひずみ派だけでなく,
周期関数であれば，一般の解析することができる.

周期関数とは
(periodic function)

式

を満たす

式

である.

Tは周期(fundamental period)

図

例えば,

式

等である.

●周期関数の性質と例

周期関数の線形性(linearity)

関数 $f(x)$と$g(x)$ が周期 T の周期関数であれば

その線形結合 $h(x) = af(x) + bg(x)$

もまた，周期 T の周期関数となる.

(証明)

式

●例題

次の関数の基本周期を求めよ

$$f(x) = \cos\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3}$$

（解）

●例題

関数 $f(x)$ と $g(x)$ がともに周期 T の周期関数であるとき

この2つの関数の積 $h(x) = f(x)g(x)$

も周期 T の周期関数となることを示せ.

（解）

●フーリエ級数

いま関数 $f(x)$ を周期2πの周期関数とする.

関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開(Fourier series expansion)

とは，三角関数の級数（三角関数級数）によって，
関数 $f(x)$ をあらわそうというものである.

式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

周期2πの任意の周期関数はフーリエ級数に展開できる.

周期が2πでない場合はまた後でやる.

●フーリエ級数2

実は周期2πの周期関数であれば，どんな関数でも，

a_n と b_n を適当に選ぶことにより以下のように

フーリエ級数展開することができる.

式
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

フーリエ係数（Fourier coefficient)

式
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad (\qquad\qquad)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \quad (\qquad\qquad)$$

●偶関数と奇関数

任意の x （ $-\infty < x < \infty$ ）にたいして

偶関数とは $f(-x) = f(x)$

奇関数とは $f(-x) = -f(x)$ となるもの

ポイント1

関数 $f(x)$ を任意の関数とするとき

式

はそれぞれ，偶関数および，奇関数となる
添え字のeは偶(even)，oは(odd)をあらわす

また $f(x)$ は次のようにあわせる.

式

式 偶関数部分

式 奇関数部分

●偶関数と奇関数２

ポイント２

偶関数と偶関数の積は偶関数となる.
奇関数と奇関数の積は偶関数となり,
偶関数と奇関数の積は奇関数となる

ポイント３

式 , 式 をそれぞれ偶関数，奇関数とする，このとき

式

となる.

●フーリエ級数計算のコツ（1）

偶関数 式 のフーリエ係数は，計算しなくても 式 である.

フーリエ係数（Fourier coefficient)

式
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

理由: ポイント2 より，偶関数 式 と奇関数 式 の積 式 は奇関数である.

よって ポイント3 より

式

●フーリエ級数計算のコツ(2)

奇関数 式 のフーリエ係数は，計算しなくても 式 である.

フーリエ係数(Fourier coefficient)

式
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

理由: ポイント2 より，奇関数 式 と偶関数 式 の積 式 は奇関数である.

よって ポイント3 より

式

●フーリエ級数計算のコツ（３）

ポイント1 より，任意の関数 式 は以下の様に分解できる

式

よって，関数 $f(x)$ のフーリエ係数は以下のように計算できる

式

コツ（１），（２）
の結果ら明らか

別の理解の仕方

関数 $f(x)$ の偶関数部分 $f_e(x)$ のフーリエ係数は a_n と ０

の奇関数部分 $f_o(x)$ のフーリエ係数は ０ と b_n

●フーリエ級数計算のコツ（4）

→ フーリエ変形数の線形性について

超重要！

関数 式 のフーリエ係数を 式

関数 式 のフーリエ係数を 式 とする.

このとき，関数 式 のフーリエ係数は

式 となる.（ただし，c ，d は定数.）

この性質を**フーリエ係数の線形性**という.

●例題１

関数 $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < \pi) \\ 0 & (\pi \leq x < 2\pi) \end{cases}$ を

$f(x+2\pi) = f(x)$ によって周期的に拡張した関数 $f(x)$

をフーリエ級数展開せよ.

図

ヒント: $f(x)$ を奇関数部分 $f_o(x)$ と

偶関数部分 $f_e(x)$ に分け,

コツ（４） を駆使せよ.

●例題１（続き１）

解　$f(x)$ の奇関数部分を $f_o(x)$ と置くと, $f_o(x)$ は

式

を $f_o(x+2\pi)=f_o(x)$ によって周期的に拡張した関数である.

図

また，$f(x)$ の偶関数部分を $f_e(x)$ と置くと, $f_e(x)$ は

式

となる.

図

●例題１（続き２）

解 $f_o(x)$ のフーリエ系数 式 は 式

$f_o(x)$ のフーリエ系数 式 は

式

$f_e(x)$ のフーリエ系数 式 は

式

$f_e(x)$ のフーリエ系数 式 は 式

●例題1（続き3）

解　よって コツ（4） フーリエ係数の線形性より,

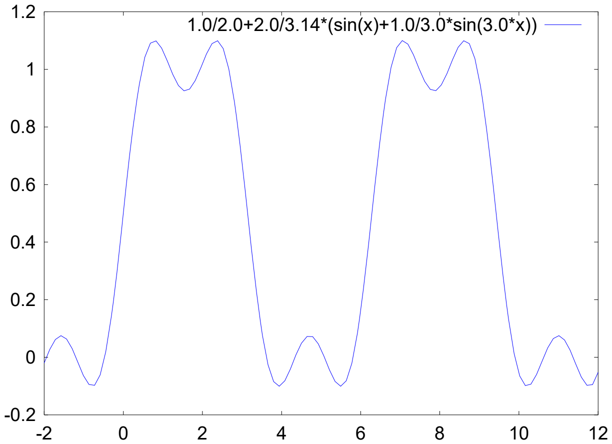
式

以上から関数 式 のフーリエ級数展開は

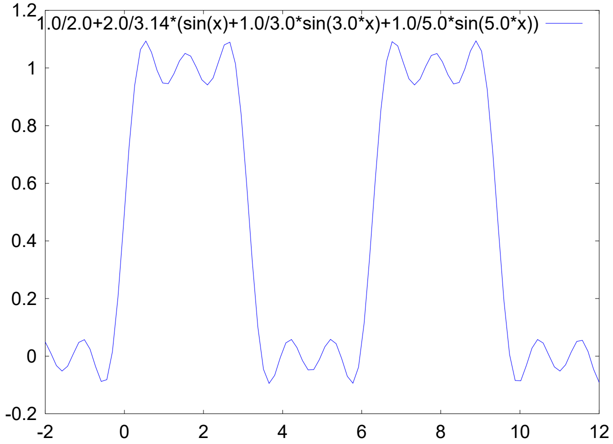
式

と求まる.

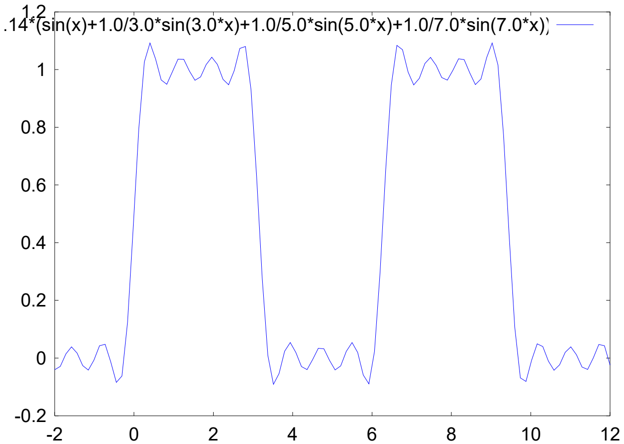
●例題1（続き4）



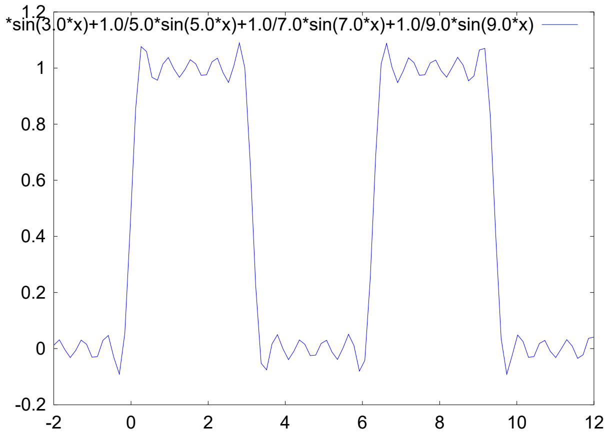
m=2



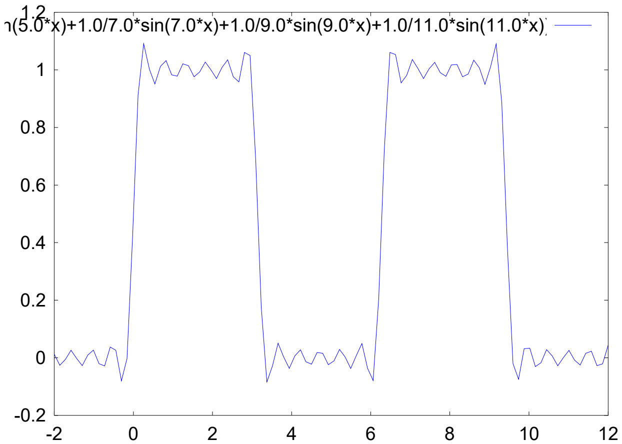
m=3



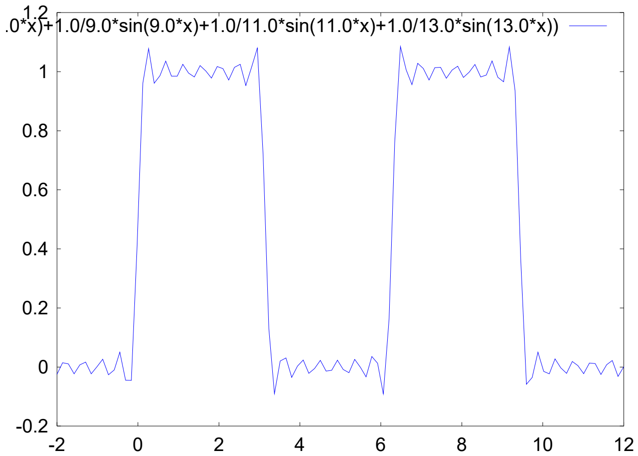
m=4



m=5



m=6



m=7

m=∞で元の関数 式 と等価になる.

●例題2

関数 $f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x < \pi)$ を

$f(x+2\pi) = f(x)$ によって周期的に拡張した関数 $f(x)$

をフーリエ級数展開せよ.

図

ヒント: $f(x)$ は偶関数.

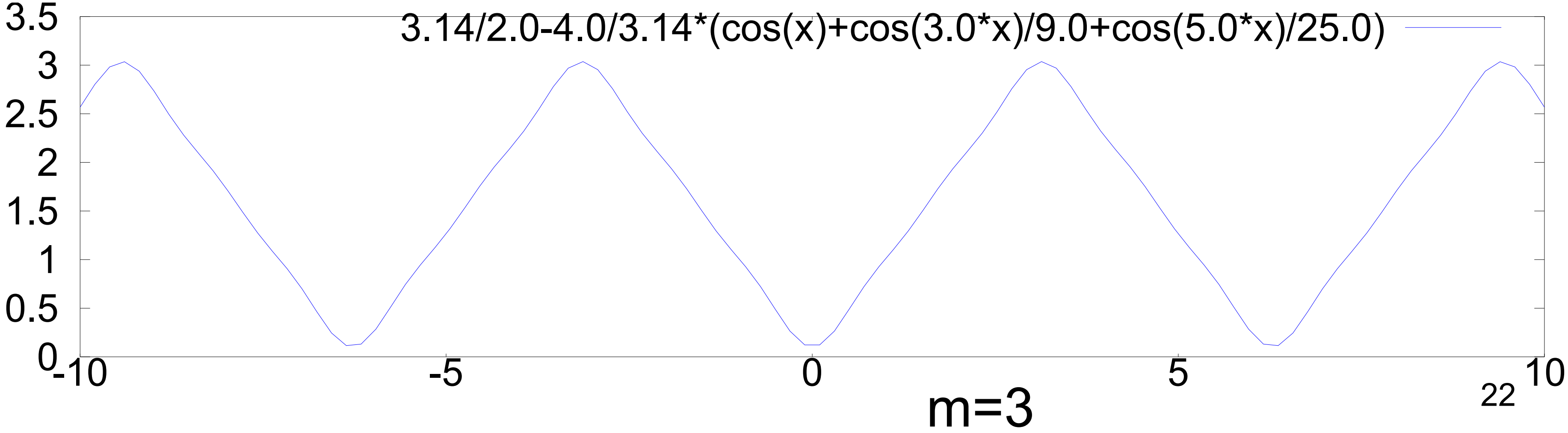
コツ(1) より, 式 は考えなくても 式

●例題2（続き1）

解

●例題２（続き２）

解


3.14/2.0-4.0/3.14*(cos(x)+cos(3.0*x)/9.0+cos(5.0*x)/25.0)
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-10
-5
0
5
10
m=3

●例題3

関数 $f(x) = x \quad (-\pi \leq x < \pi)$ を

$f(x+2\pi) = f(x)$ によって周期的に拡張した関数 $f(x)$

をフーリエ級数展開せよ.

図

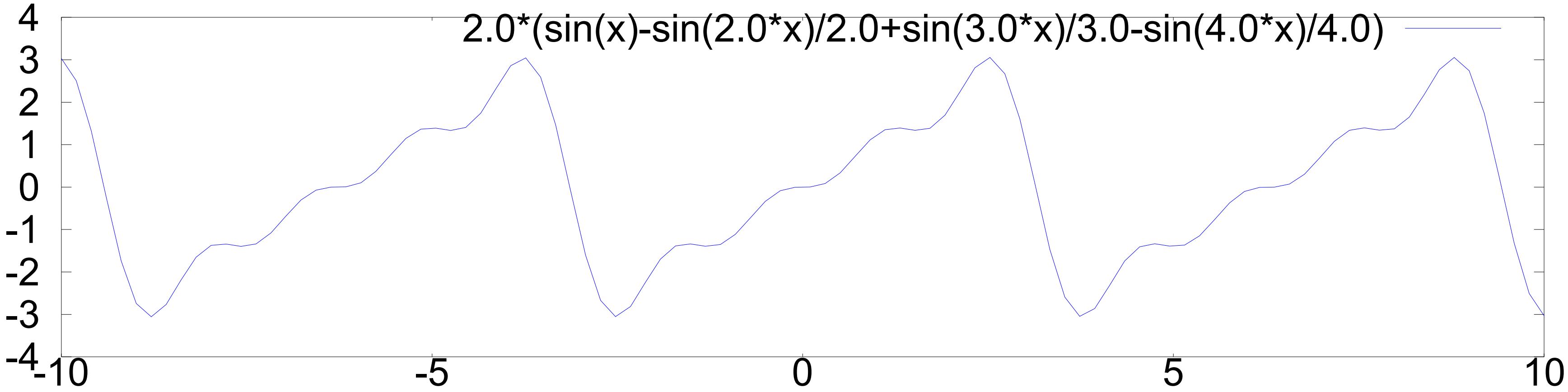
●例題3（続き1）

解

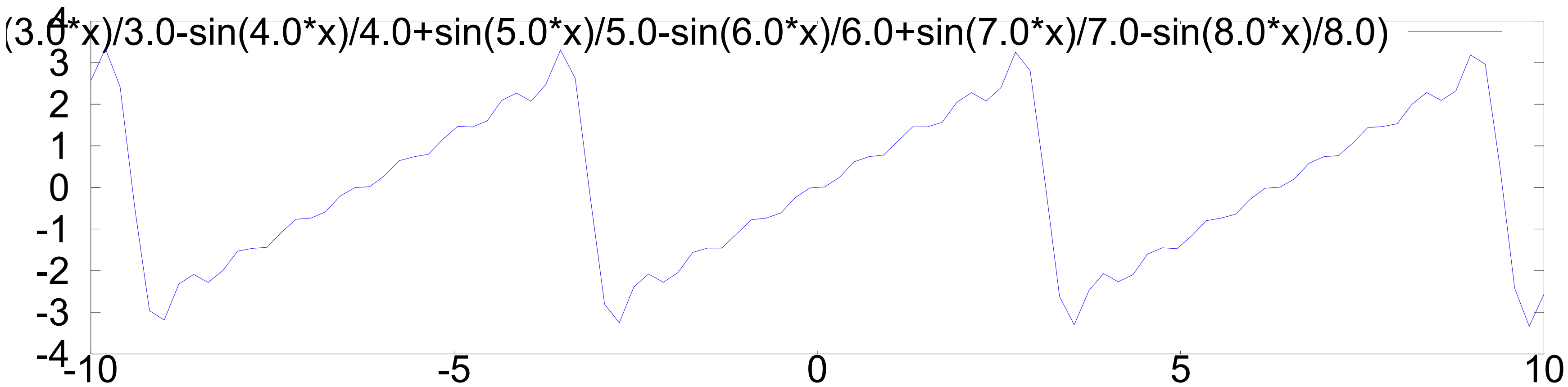
●例題3（続き2）

解

n=4



n=8



●一般の周期を持つ周期関数に対するフーリエ級数

関数 $f(x)$ を周期 $2L$ の周期関数とする.

この関数をフーリエ級数展開することを考える.

□考え方□

周期 2π の周期関数 の展開法ついてはもう知っている.

周期 $2L$ の周期関数 をスケール変換することで

周期 2π の周期関数 の関数に変換できる.

→

関数をスケール変換し, スケール変換した関数の級数展開をスケール逆変換すればいい.

●スケール変換の方法

	変換前	変換後
周期	$2L$	2π
変数	x	t
関数	$f(x)$	$h(t)$

このとき x と t の間には次の関係がある.

式

導出法: $x = 2L$ のとき $t = 2\pi$ であるので

$x = a\ t$ とおいて a を求める

よって, 関数 $f(x)$ をスケール変換して得られる

関数 $h(t) =$ 式 は周期 2π の周期関数となり

(次のページへ)

●スケール変換の方法2

式 $h(t) =$

とフーリエ級数展開できる.

t を変数 x に戻すと 式 $f(x) =$ により,

式 $f(x) =$

となる.

一方フーリエ係数は

式

●例題1（一般の周期関数）

関数 $f(x) = x \quad (-2 \leq x < 2)$ を

$f(x+4) = f(x)$ によって周期的に拡張した関数 $f(x)$

をフーリエ級数展開せよ.

解

解（の続き）

●例題2（一般の周期関数）

関数 $f(x) = \cos(x) \quad (-4 \leq x < 4)$を

$f(x+8) = f(x)$ によって周期的に拡張した関数 $f(x)$

をフーリエ級数展開せよ.

解

解（の続き）

●これからの流れ

1. 複素フーリエ級数

実は，フーリエ係数こそが波のスペクトルをあらわす．
すなわち，フーリエ変換されたモノである．
しかし a_n と b_n と言う様に二つもあっては困る．
よって，一つの係数に統一する．

2. 離散フーリエ変換

複素フーリエ係数こそが離散フーリエ変換されたモノ．

3. 線形RLC回路

電気回路を解析してみる．

4. 線形システム

5. 連続フーリエ変換

n が整数ではなく，実数を取る場合を考える．

●オイラーの公式

オイラーの公式 $\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)}$

電気系の本では，通常以下のような表記を行うが，

$$\varepsilon^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

物理・数学系の本では

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

とすることが多い．本稿では，**引き続き**物理・数学系の表記を取ることにする．
電気系の表記を取るときはその都度，注意を促す．

●ド・モアブル(de Moivre)の公式

オイラーの公式 $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ ---------- (1)

x に $-x$ を代入すると

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x)$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x) \quad \text{-------------------------} \quad (2)$$

式(1),(2)の和と差を取ることにより,

式

次の**ド・モアブル**の公式を得る.

$$\boxed{\sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}, \quad \cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}}$$

●複素フーリエ級数

ド･モアブルの公式 $\sin(nx) = \dfrac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$, $\cos(nx) = \dfrac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$

をフーリエ級数展開の式 $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

に代入すると,

式

となる，ここで，複素フーリエ係数を

式

と定義すると，次で与えられる**複素フーリエ級数**展開の式が得られる.

式（ここは小さい字で書いてね）

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}}$$

●複素フーリエ係数

フーリエ係数 $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \end{cases}$ を

$c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$ に代入すると,

式（3行）

複素フーリエ係数 $\boxed{c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx}$ を得る.

複素フーリエ係数に対し，今までのフーリエ係数を
実フーリエ係数という.

●一般の周期の場合の複素フーリエ級数展開

周期 $2L$ の場合の複素フーリエ級数を考える.

$$f(x) \equiv h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$ とおくことができる.

（ t 座標の上では，周期 2π であると考える．）

xと t の間に $t = ax$ の関係があるとするなら

$2\pi = a \cdot 2L$ となり，$a = \dfrac{\pi}{L}$ と求まる.

よって $t = \dfrac{\pi}{L}x$ となり，

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(\pi/L)x}}$$

と**一般の周期の場合の複素フーリエ級数**展開の式が得られる.

●一般の周期の場合の複素フーリエ係数

同様に周期 $2L$ の場合の複素フーリエ級数を考える.

座標 t 上において複素フーリエ級数を以下のように置くと,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)e^{-int}dt$$ が成り立つ.

$$t = \frac{\pi}{L}x$$ 及び $$dt = \frac{\pi}{L}dx$$ より,

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in(\pi/L)x}dx}$$

と**一般の周期の場合の複素フーリエ係数**が得られる.

●離散フーリエ変換

$f(x)$ が周期 $2L$ の周期関数とするとき，
その，**離散フーリエ変換**は次で与えられる．

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in(\pi/L)x}dx}$$

「複素フーリエ係数の式」

理工学では，c_n を**スペクトル**(SPECTRUM)と呼ぶ．

c_n を求めることを $f(x)$ の**スペクトルを調べる**とか，$f(x)$ を**スペクトルに分解する**とか言う．

逆フーリエ変換は次の式で与えられる．

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(\pi/L)x}}$$

「複素フーリエ級数展開の式」

離散でない場合や周期関数でない場合は**連続フーリエ変換**を使う

●スペクトルの例（光）

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in(\pi/L)x}dx$$

事前知識

1．太陽光はいろいろな周波数を持つ光の集まりである.

2．光の色はその周波数によって決まる.

3．いろいろな色の光が集まって太陽光となっている.

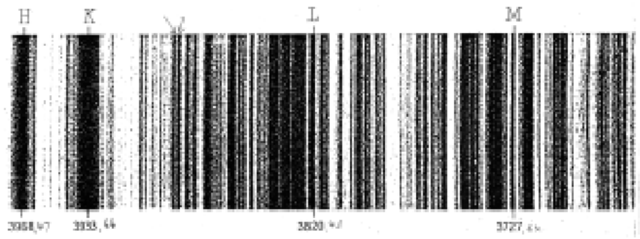
異なる周波数の光は屈折率が違う.

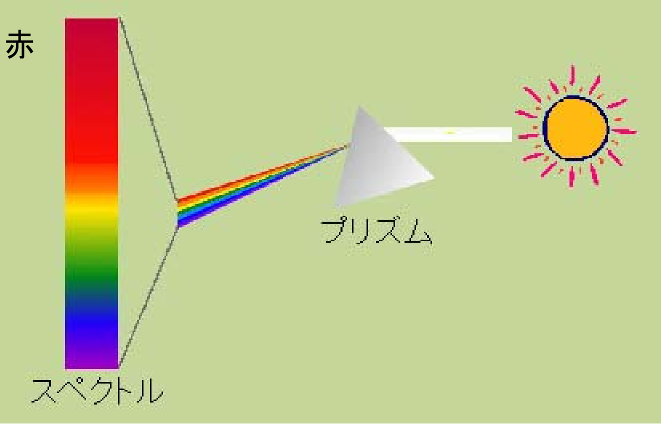
↓

太陽光をプリズムに通すと，色が分解して現れる（**分光**）.

分光された光の強さの分布が**スペクトル**.

- 太陽の可視光スペクトル（吸収線）

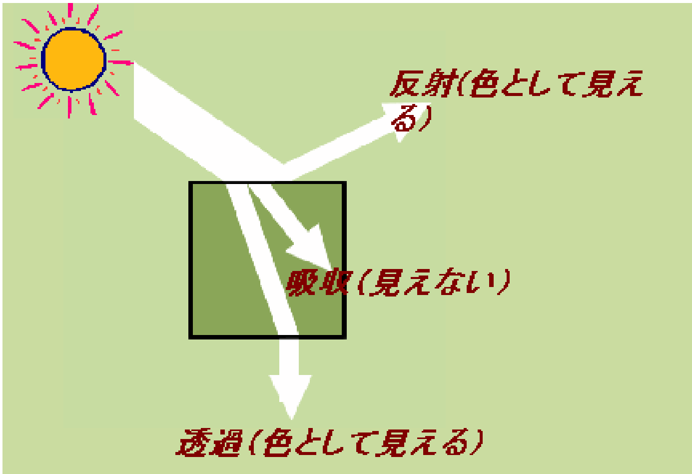




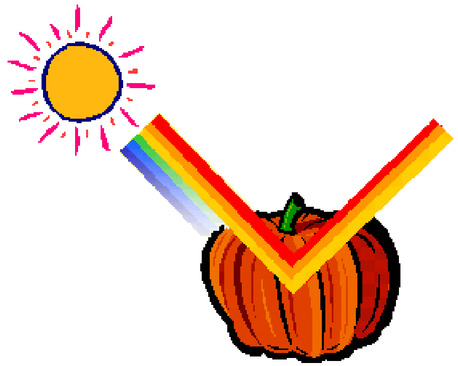
分光された n 番目の光の強度は $|c_n|$ で与えられる.

●光について(補足)

１．光は物に当ると**反射・吸収・透過**する.
２．吸収された光は見えないが**反射・透過**した光は「色」として見える.



カボチャが橙色に見えるのは
スペクトルの中の赤や橙色の光を反射して
青や青紫の色を吸収しているからである.



物が光を**反射**や**透過**して見える色を**物体色**と呼ぶ.

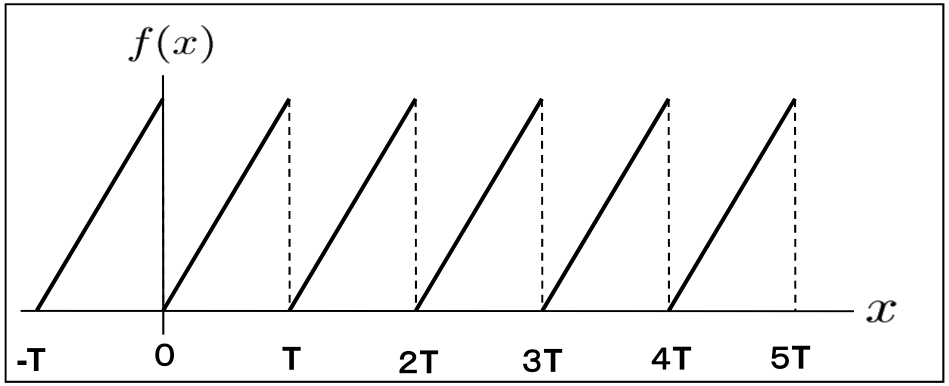
●スペクトルについての例題1

関数 $f(x)$ が実数のときには, $c_{-n} = c_n^*$ となることを示せ.
ただし, c_n^* は c_n の複素共役($c_n = a + ib$ のとき
$c_n^* = a - ib$, ただし, a と b は実数)

解

●スペクトルについての例題２

関数 $f(x)=\dfrac{ax}{T}$ （ $0\leq x<T$ ）を $f(x+T)=f(x)$ によって周期的に拡張した関数 $f(x)$ のスペクトル c_n を調べよ.

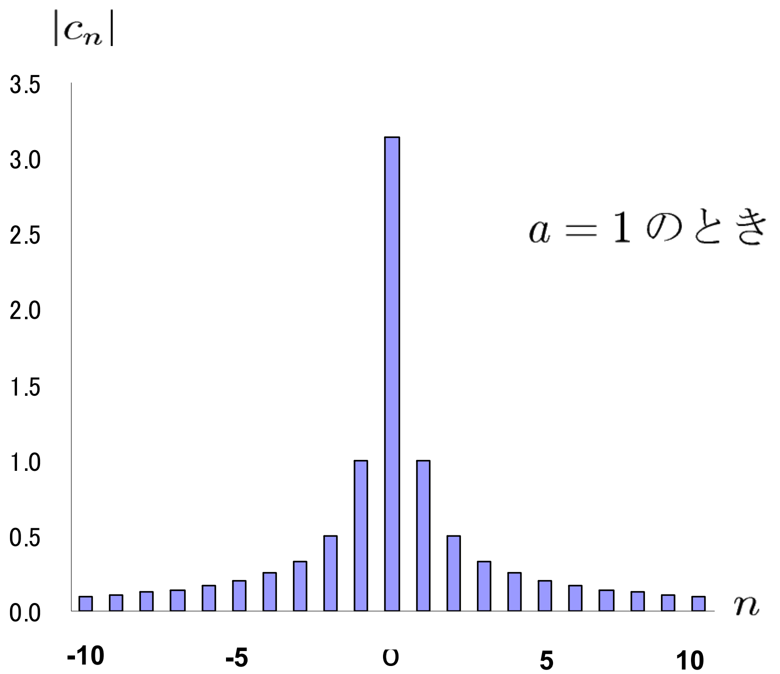


（豆知識）このような波形をのこぎり派と呼ぶ. 電気工学では, テレビの走査線の調整に用いる

解

●スペクトルについての例題2（つづき）

解



●複素直交関数系

重要！
（これからよく使う）

任意の整数 n , m に対して,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}(e^{inx})^* dx = \begin{cases} 2\pi & (m = n \text{ のとき}) \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ.

ただし, * は複素共役を意味する. すなわち $(e^{inx})^* = e^{-inx}$.

この成立を, **複素関数直交関数系がなされている**, と言う

言い換えれば

こっちの方をむしろよく使う

$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx$ が値を持つのは $m = n$ のときのみでその値は 2π である

●複素直交関数系の証明

（証明）

(i) $m = n$ のとき

(ii) $m \neq n$ のとき

●例題（逆変換の確認）

離散逆フーリエ変換: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(\pi/L)x}$

を離散フーリエ変換: $c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in(\pi/L)x}dx$

すると元に戻ることを確認せよ.

解

●離散フーリエ変換の微分

周期 $2L$ の周期関数 $f(x)$ の離散逆フーリエ変換

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(\pi/L)x}$$

が**項別に微分**できるとすると,

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{inc_n} e^{in(\pi/L)x}$$

となる.

$$\underline{inc_n} = \underline{c_n(f')}$$

とおくと,

$$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c_n(f')} e^{in(\pi/L)x}$$

よって離散フーリエ変換の微分は $\boxed{c_n(f') = inc_n(f)}$ と求まる.

●離散フーリエ変換の積分1

周期 $2L$ の周期関数 $f(x)$ の離散逆フーリエ変換

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}}$$

が**項別に積分**できるとする.

このとき関数 $f(x)$ を不定積分した関数を $F(x)$ とすると,

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx=\int_0^x \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}}_{\text{分離}}dx=\int_0^x\Big[\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n e^{inx}+c_0+\sum_{n=+1}^{\infty}c_n e^{inx}}_{\text{分離}}\Big]$$

ここで, $\sum{}'$ が $n=0$ を除く和を意味するものとすると,

$$F(x)=\int_0^x\Big[c_0+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'c_n e^{inx}\Big]$$

となるので, **項別に積分**すると

$$=c_0x+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{c_n(e^{inx}-1)}{in}$$

$$=c_0x-\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{c_n}{in}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{c_n e^{inx}}{in}$$

よって

$$\boxed{F(x)-c_0x=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{c_n}{in}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{c_n e^{inx}}{in}}$$

●離散フーリエ変換の積分2

元の式 $\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}}$ を展開すると

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' c_n e^{inx}$$

となる，この式と以下の式を比較すると，

（対応している箇所）

$$\boxed{F(x) - c_0 x = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{c_n}{in} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{c_n e^{inx}}{in}}$$

よって，次の離散フーリエ変換を積分した式が得られる．

$$\boxed{c_{0[F(x)-c_0(f)x]} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{c_n}{in}}$$

$$\boxed{c_{n[F(x)-c_0(f)x]} = \frac{c_{n(f)}}{in}}$$

単に in で割れば良いだけ

●演習問題1

周期関数 $f(x)$ が偶関数であれば，その複素フーリエ係数 c_n
は実数となることを示せ，また，奇関数であれば純虚数となることを示せ．

解

●演習問題2

ド・モアブルの公式を利用して，次の複素フーリエ級数展開を求めよ.

（1）$\cos^3(x)$　　（2）$\sin^4(x)$

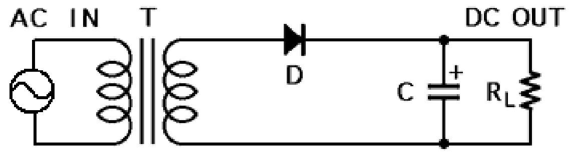
解

（1）$\cos(nx) = \dfrac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$ より

（2）$\sin(nx) = \dfrac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$ より

●整流回路

（1）半波整流回路_

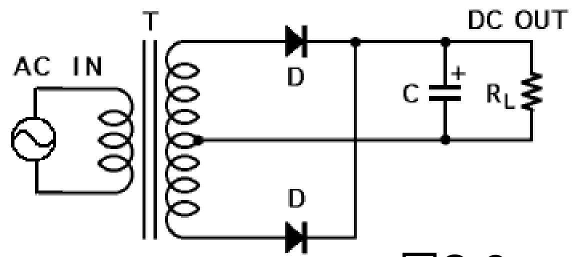


図S-1

・ダイオードが1個で済む最も簡単な回路.
・交流の半サイクルのみ整流.
・小電流負荷の場合によく使用される.
・出力リップル（脈動）は電源周波数と同じになる.
・ダイオードの逆耐電圧は、トランス2次側交流電圧の3倍以上必要.

（2）両波整流回路_

・センタ・タップ付のトランスを使って半波整流回路で利用しなかった
　残りの半サイクルも整流する回路.
・出力リップルは電源周波数の2倍になる.
・ダイオードの逆耐電圧は、トランス2次側交流電圧の3倍以上必要.



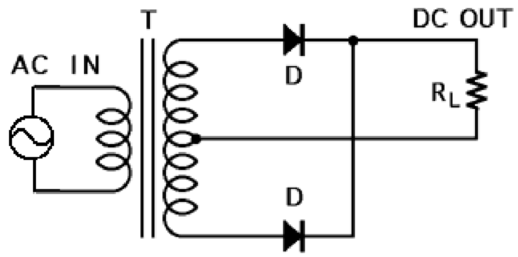
図S-2

●両波整流回路のスペクトル分析1

分析を簡単化するために，図S-2からコンデンサを取り去った以下の図S-3を考える.

入力

$\alpha\cos(x)$



出力

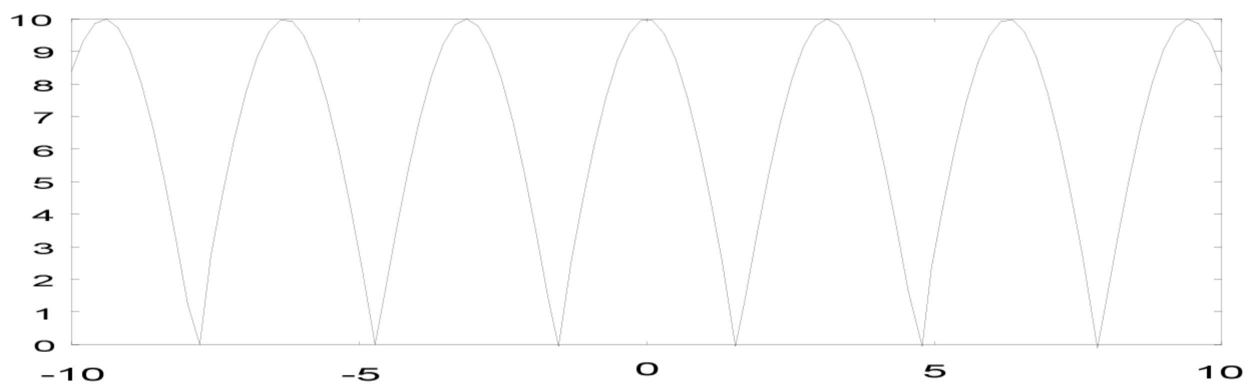
$f(x) = a|\cos(x)|$

図S-3

この回路において，入力電圧を $\alpha\cos(x)$ とすれば，
その出力電圧が $f(x) = a|\cos(x)|$ になることが知られている.

この整流回路の出力電圧 $f(x) = a|\cos(x)|$ のスペクトルを求める.

$f(x) = 10|\cos(x)|$
のグラフ



●両波整流回路のスペクトル分析２

スペクトルを求めるには $f(x) = a|\cos(x)|$ を離散フーリエ変換すれば良い.

ここで $a|\cos(x)|$ の周期は π であるので,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} a(\cos x)e^{-2inx}dx$$

ド・モアブルの定理を使うと

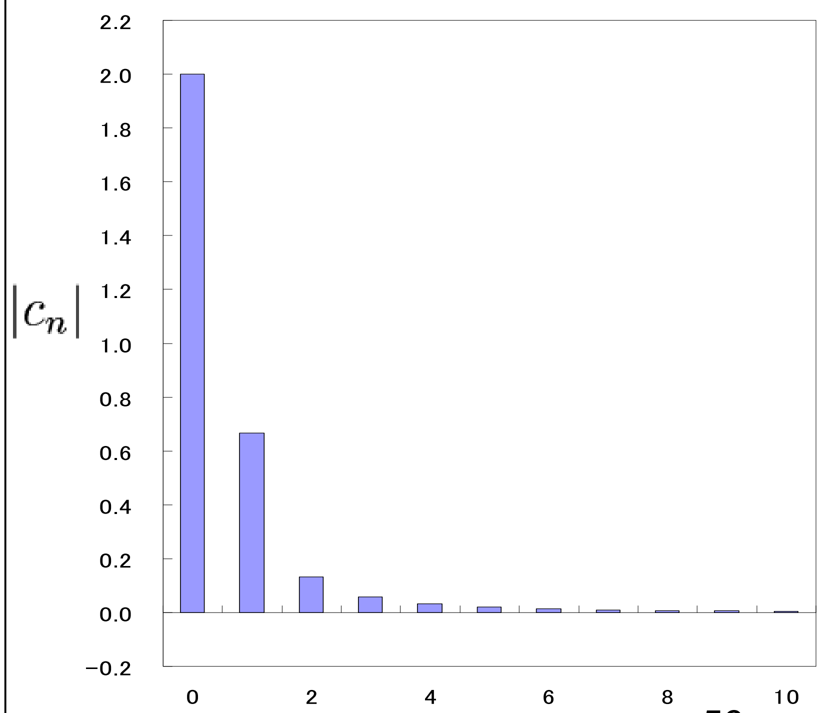
$$= \frac{a}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)e^{-2inx}dx$$

この間の計算は次ページ演習

$$= \frac{2a}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$$

と $f(x)$ のスペクトルが求まる

$a = \pi$のとき



●演習問題(両波整流回路のスペクトル分析の計算)

前ページの $\displaystyle \frac{a}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)e^{-2inx}dx=\frac{2a}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$ が成り立つことを確認せよ.

解

●線形システム

線形性をもつ系を**線形システム**(linear system)と呼ぶ

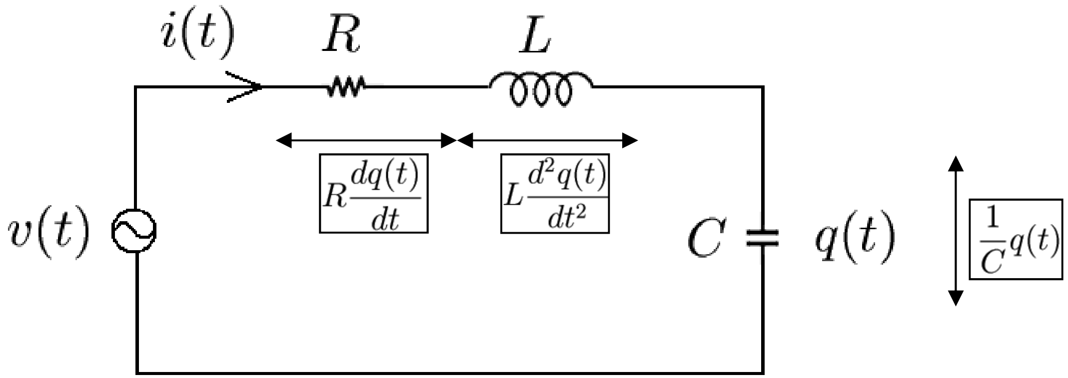
ここからは，これまでの知見を元に，
周期的な外力（これを**励振**ともいう）を受ける，
特に電気回路の線形システムの解析を行っていく.

線形システムでは，**重ね合わせの原理**がなりたつ.

線形性により，いくつかの解を
足し合わせて（重ね合わせて）
新しい解を作ること

電気回路もフーリエ変換も線形性が成り立つ.
ここからはそれらの密接な関係を見ていく.

●線形RLC回路1



図のようなRLC回路を考える．キャパシタに蓄えられる電荷を $q(t)$ とすると，回路に流れる電流 $i(t)$ は次の式で与えられる．

$$\boxed{i(t) = \frac{dq(t)}{dt}}$$

さらに電圧源の電圧を $v(t)$ とおくと，キルヒホッフの第二法則より次の式が得られる．

$$\boxed{L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) = v(t)}$$

であるので

$\boxed{i(t) = \frac{dq(t)}{dt}}$ を代入すると

$$\boxed{L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = v(t)}$$

この式の解を求める

●線形RLC回路2（定常解の解法）

いま，電圧源 $v(t)$ が角周波数 ω の周波波形であるとする.

すなわち，$v(t)$ は周期 $v\left(t+\dfrac{2\pi}{\omega}\right)=v(t)$ の周期関数とする.

以後の計算を簡単化するために $v(t)$ を以下のように複素フーリエ級数に展開する.

$$\boxed{v(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n e^{in\omega t}} \xleftarrow{\text{対応している}} f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

ここで，

$$\boxed{V_n=|V_n|e^{i\phi n}} \xleftarrow[\text{一般にこう書ける}]{\text{対応している}} c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

は複素数であり，**複素振幅**と呼ばれる.

$$\boxed{L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{1}{C}q(t)=v(t)}$$

←この式の**線形性**から $v(t)$ を $V_n e^{in\omega t}$ で置き換えた式

$$\boxed{L\frac{d^2q_n(t)}{dt^2}+R\frac{dq_n(t)}{dt}+\frac{1}{C}q_n(t)=V_n e^{in\omega t}}$$

の解 $q_n(t)$ をまずは求める.

●線形RLC回路3（定常解の解法）

$q_n(t)$ を求めることができれば， $q(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n(t)$ とすることで

$$\boxed{L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{1}{C}q(t)=v(t)}$$

の解 $q(t)$ が求まる.

←(★)

$q(t)$ は， $q_n(t)$ の重ね合わせで求まる.

ここからは $q_n(t)$ を実際に求める.

$v(t)$ と同様に $q(t)$ を複素フーリエ級数に展開することで $q_n(t)$ を以下のように置く.

$\boxed{q(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n e^{in\omega t}}$ であるので $\boxed{q_n(t)=Q_n e^{in\omega t}}$

(★)式に $\boxed{q_n(t)=Q_n e^{in\omega t}}$ を代入すると次のようになる（次ページ演習），

$Q_n=\dfrac{CV_n}{1-n^2\omega^2LC+in\omega RC}$ よって， $\boxed{q(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{CV_n}{1-n^2\omega^2LC+in\omega RC}}$

と，フーリヘ級数展開を用いることで**特解**を簡単に求めることができる.

●線形RLC回路4（演習問題）

$$\boxed{L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{1}{C}q(t)=v(t)}$$ に $\boxed{q_n(t)=Q_n e^{in\omega t}}$ を代入することで，

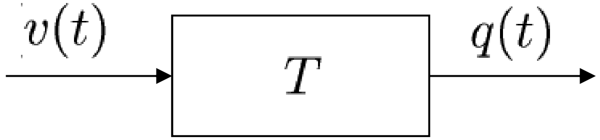
$$Q_n=\frac{CV_n}{1-n^2\omega^2LC+in\omega RC}$$ を求めよ.

解

●一般化された線形システム1

これまでの話しをより一般的にまとめてみる.

電圧 $v(t)$ を加えたときの出力として電荷 $q(t)$ が得られていると考えられる.



入力から出力への対応関係を数式にすると以下のようになる.

$$q(t) = T[v(t)]$$

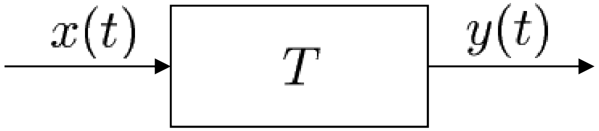
> T は関数関係とか微分演算とかを意味する.
> 数学的には $v(t)$から $q(t)$ を決める規則を与えている.
> これを v から q への**写像** (map)と言う.

電気回路の場合, a を複素数として, この T は以下の二つの式を満たしている.

（1） $T[av(t)] = aT[v(t)]$

（2） $T[v_1(t) + v_2(t) = T[v_1(t)] + T[v_2(t)]$

●一般化された線形システム２



一般に上図のように入力 $x(t)$ に対し出力 $y(t)$を対応させるシステム

$$y(t) = T[x(t)]$$

が，以下の性質を満たすとき，これを**線形システム**という.

（１） $T[ax(t)] = aT[(t)]$

（２） $T[x_1(t) + x_2(t) = T[x_1(t)] + T[x_2(t)]$

いま入力 $x(t)$が周期関数で

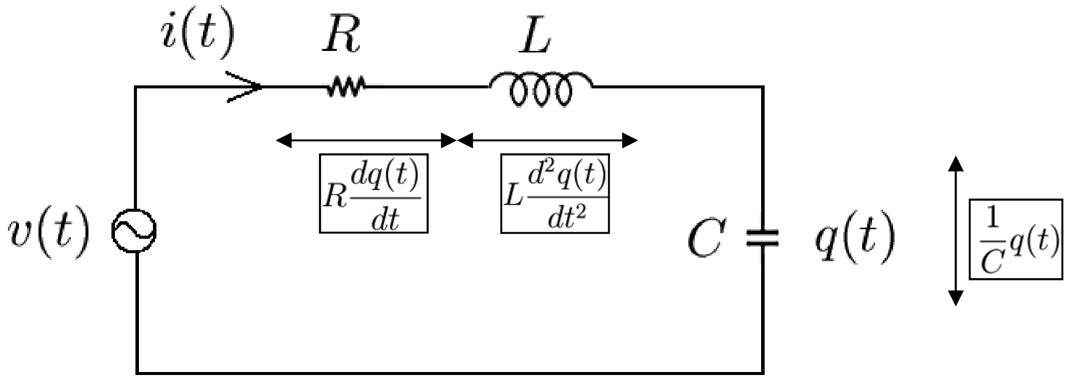
$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} X_n e^{in\omega t}$$

で与えられるとする. このとき線形システムの出力 $y(t)$は

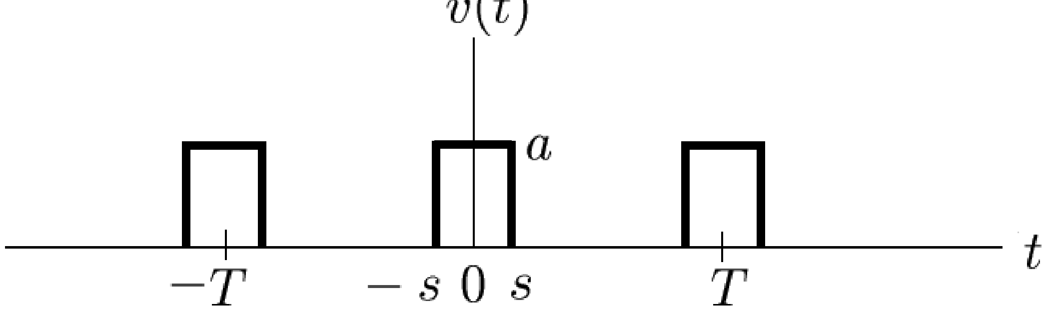
$$y(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} X_n T[e^{in\omega t}]$$ となる.

つまり $e^{in\omega t}$ に対する応答 $T[e^{in\omega t}]$ が分かっていれば，一般の周期入力 $x(t)$ に対応する応答 $y(t)$を調べることができる.

●演習問題1（線形システム）



上図のRLC回路に下図に示すような方形波列が入力されたときの定常出力 $q(t)$ を求めよ.



ヒント:

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-in(\pi/L)x} dx$$

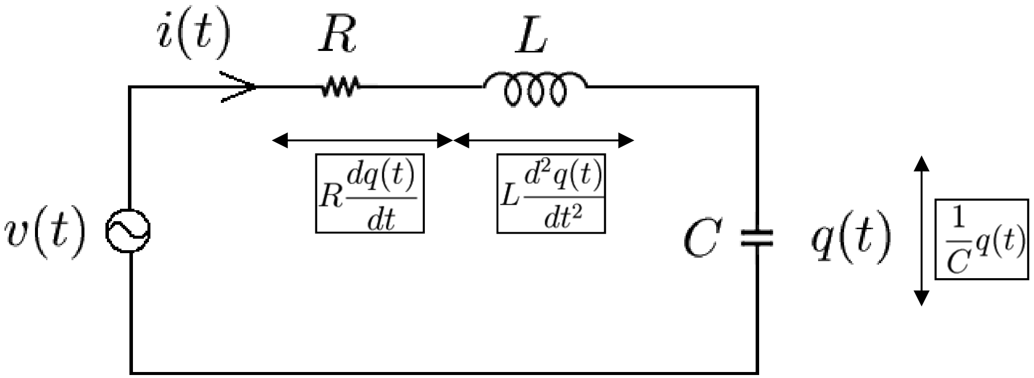
$$Q_n = \frac{CV_n}{1 - n^2\omega^2 LC + in\omega RC}$$

を使う.

●演習問題１（線形システム）その２

解

●演習問題2（線形システム）



左図の回路に，ノコギリ派

$$f(x) = \frac{ax}{T} \quad (\ 0 \le x < T \ )$$

$$v(t + \frac{2\pi}{\omega}) = v(t) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

を加えたときの定常解 $q(t)$ を求めよ

ヒント

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in(\pi/L)x}dx} \rightarrow \boxed{V_n = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)e^{-in\omega t}dt}$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(\pi/L)x}} \rightarrow \boxed{v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n e^{in\omega t}}$$

$$\boxed{Q_n = \frac{CV_n}{1 - n^2\omega^2 LC + in\omega RC}}$$ を使う.

1．まず V_0, V_n を求める.
2．次に $q(t)$ を求める.

●演習問題2（線形システム）ー2

解

●演習問題2（線形システム）－3

解

●非周期関数１

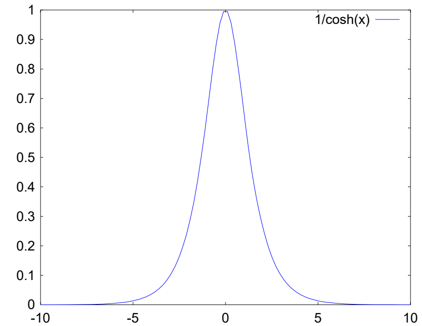
非周期関数 $f(x)$ とは，周期のない関数，すなわち

$$f(x+T)=f(x)$$

を満たす $T>0$ が存在しない関数である．
非周期関数は，周期関数の周期 T が $T\to\infty$ となったものと考えることができる．

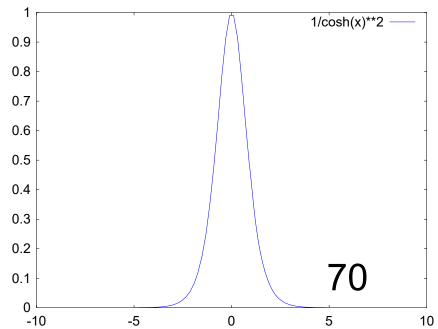
（例１）**ソリトン**：粒子のような性格を持った非線形波動として，ソリトンと呼ばれる．パルス波が理工学の様々な分野に現れる．ソリトンは，各時刻で次のような単一パルス波形をしており，
x の非周期波形として

$$f(x)=a\ \mathrm{sech}(k(x-x_0))=a/\cosh(k(x-x_0))$$



あるいは，

$$f(x)=a\ \mathrm{sech}^2(k(x-x_0))=a/\cosh^2(k(x-x_0))$$



とあらわされる．

●非周期関数２

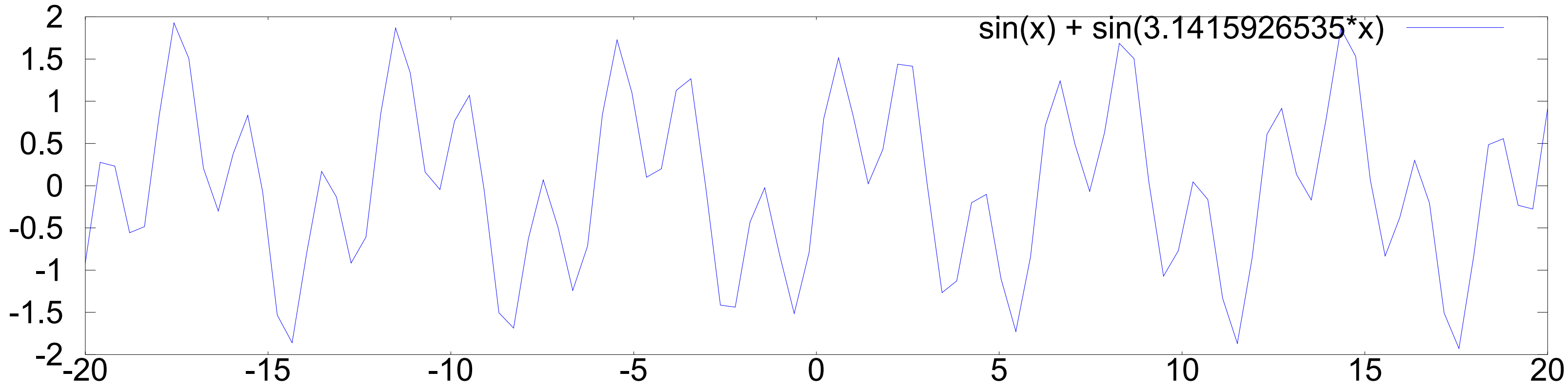
（例２）**概周期関数**

$$f(t) = \sin at + \sin bt$$

において，$a \neq 0, b \neq 0$ で比　b/a を無理数とすると，$f(t)$ は非周期関数となる．これを**概周期関数**と呼ぶ．
意味は，厳密に言うと周期関数ではないが，**おおむね周期的**と言う意味である．無理数 $\omega = b/a$ を小数点以下第　n　位まででで打ち切った数を　ω_n　とすると

$$f_n(t) = \sin at + \sin a\omega_n t$$

は周期 $T = 10^n 2\pi/a$　の周期関数である．ここで　$n \to \infty$ とすると，$f_n(t)$ は $f(t)$ になると考えられるので，この場合もやはり概周期関数は周期関数の極限と考えることができる．



●フーリエ変換（まずはフーリエ積分公式）

フーリエ積分公式

これまで非周期関数とは周期関数の周期 T を $T \to \infty$ とした極限であることを確認した.

ここからは，周期 T の周期関数に対する離散フーリエ変換が $T \to \infty$ でどのようになるかを考察し，非周期関数に対するフーリエ変換を導入する.

周期 $T = 2L$ の周期関数 $f(x)$ を考える.
関数 $f(x)$ が複素フーリエ級数に展開できるとすると

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{L}^{L} f(y)e^{-in\pi y/L}dy \quad \cdots\cdots （１）$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \quad \cdots\cdots （２）$$

式（１）に式（２）を代入すると，

フーリエ積分公式 $\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega(y-x)}dy}$ が得られる

右辺を関数 $f(x)$ に対するフーリエ積分表示と呼ぶ.

●演習問題（フーリエ積分公式の導出１）

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{L}^{L} f(y)e^{-in\pi y/L}dy \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

式（１）に式（２）を代入することで，

フーリエ積分公式 $\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega(y-x)}dy}$ を求めよ.

解

●演習問題（フーリエ積分公式の導出２）

解

●離散フーリエ変換の復習

$f(x)$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in(\pi/L)x}dx$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(\pi/L)x}$$

c_n

フーリエ係数 c_n を求めること（離散フーリエ変換すること）は
周期関数 $f(x)$ をフーリエ係数 c_n の組みに変換することであり，
逆にフーリエ係数 c_n から$f(x)$を求めること（離散逆フーリエ変換すること）は
はこの変換の逆変換を行うことである.

このような立場から，**フーリエ積分公式**を次のページのように
置き直すことができる

●（連続）フーリエ変換

フーリエ積分公式 $$f(x) = \underline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}} \underline{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega(y-x)}dy$$

を次のように置き換える.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \qquad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y}dy$$

関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリエ変換（Fourier transform）
関数 $f(x)$ を関数 $F(\omega)$ のフーリエ逆変換（Fourier inverse transform）という

以下，フーリエ変換を行う写像を $\mathcal{F}$ であらわすことにする.

$$\mathcal{F}[f(x)] = F(\omega)$$

また， $\mathcal{F}$ の逆写像であるフーリエ逆変換を $\mathcal{F}^{-1}$ であらわす.

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(x)$$

●（連続）フーリエ変換ー２

フーリエ変換とフーリエ逆変換の公式の対称性を良くするために

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \qquad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y}dy$$

フーリエ逆変換の式の右辺の積分係数 $\frac{1}{2\pi}$ を $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ に改め

その代わりにフーリエ変換の式の右辺に $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ を掛けても良い．

つまり，

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \qquad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y}dy$$

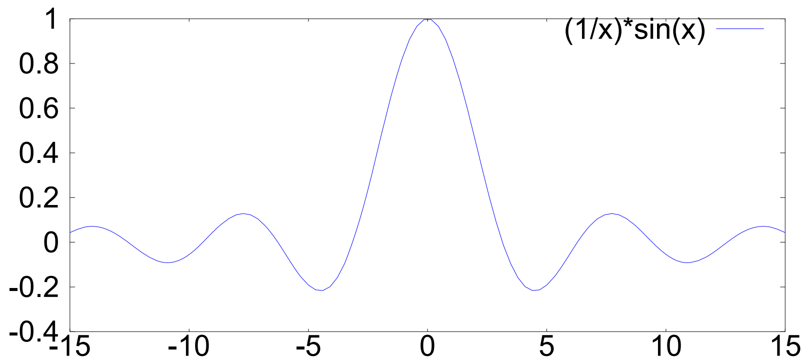
としても良い．上のペアを使うかしたのペアを使うかは
本や論文によって異なるから注意を要する．
本講義では，上のペアを用いることにする．

●演習1

次の非周期関数をフーリエ変換せよ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2d} & (|x| \leq d) \\ 0 & (|x| > d) \end{cases}$$

解



●演習2

次の非周期関数をフーリエ変換せよ

$$f(x) = e^{-a|x|} \qquad (a > 0)$$

解