応用数学Ⅱ：書き込み式ノート

フーリエ解析とその応用

（知能機械学科，バージョン5）

担当：綴木　馴

●今までの電気回路

➡ 直流（direct current）と交流（alternating current）

交流といっても特に正弦波形の交流回路を扱ってきた

60Hzの正弦波形は中国電力が苦労して作っている

➡ 中国電力が優秀だからできる.

でも一般には，ひずみ(distortion)が混ざる.

図

●ひずみ派の解析法(フーリエ解析)と周期関数

ひずみ派を解析する方法にフーリエ解析がある.

フーリエ解析は電気回路のひずみ派だけでなく,
<u>周期関数</u>であれば, 一般の解析することができる.

<u>周期関数</u>とは
<u>(periodic function)</u>

式

を満たす

式

である.

Tは周期(fundamental period)

図

例えば,

式

等である.

●周期関数の性質と例

周期関数の線形性(linearity)

関数 $f(x)$と$g(x)$ が周期 T の周期関数であれば

その線形結合 $h(x) = af(x) + bg(x)$

もまた，周期 T の周期関数となる.

(証明)

式

●例題

次の関数の基本周期を求めよ

$$f(x) = \cos\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3}$$

（解）

●例題

関数 $f(x)$ と $g(x)$ がともに周期 T の周期関数であるとき

この2つの関数の積 $h(x) = f(x)g(x)$

も周期 T の周期関数となることを示せ.

（解）

●フーリエ級数

いま関数 $f(x)$ を周期2πの周期関数とする.

関数 $f(x)$ のフーリエ級数展開(Fourier series expansion)

とは, 三角関数の級数(三角関数級数)によって,
関数 $f(x)$ をあらわそうというものである.

式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

周期2πの任意の周期関数はフーリエ級数に展開できる.

周期が2πでない場合はまた後でやる.

●フーリエ級数２

実は周期2πの周期関数であれば，どんな関数でも，

a_n と b_n を適当に選ぶことにより以下のように

フーリエ級数展開することができる.

式
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

フーリエ係数（Fourier coefficient)

式
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad (\qquad\qquad)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \quad (\qquad\qquad)$$

●偶関数と奇関数

任意の x （ $-\infty < x < \infty$ ）にたいして

偶関数とは $f(-x) = f(x)$

奇関数とは $f(-x) = -f(x)$ となるもの

ポイント1

関数 $f(x)$ を任意の関数とするとき

式

はそれぞれ，偶関数および，奇関数となる
添え字のeは偶(even)，oは(odd)をあらわす

また $f(x)$ は次のようにあわせる．

式

式 偶関数部分

式 奇関数部分

●偶関数と奇関数２

ポイント2

偶関数と偶関数の積は偶関数となる.
奇関数と奇関数の積は偶関数となり,
偶関数と奇関数の積は奇関数となる

ポイント3

式 , 式 をそれぞれ偶関数，奇関数とする，このとき

式

となる.

●フーリエ級数計算のコツ（１）

偶関数 式 のフーリエ係数は，計算しなくても 式 である.

フーリエ係数（Fourier coefficient)

式
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

理由: ポイント2 より，偶関数 式 と奇関数 式

の積 式 は奇関数である.

よって ポイント3 より

式

●フーリエ級数計算のコツ（2）

奇関数 式 のフーリエ係数は，計算しなくても 式 である.

フーリエ係数（Fourier coefficient)

式
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

理由: ポイント2 より，奇関数 式 と偶関数 式

の積 式 は奇関数である.

よって ポイント3 より

式

●フーリエ級数計算のコツ（3）

ポイント1 より，任意の関数 式 は以下の様に分解できる

式

よって，関数 $f(x)$ のフーリエ係数は以下のように計算できる

式

コツ（1），（2）
の結果ら明らか

別の理解の仕方

関数 $f(x)$ の偶関数部分 $f_e(x)$ のフーリエ係数は a_n と 0

の奇関数部分 $f_o(x)$ のフーリエ係数は 0 と b_n

●フーリエ級数計算のコツ（4）

→ フーリエ変形数の線形性について

超重要！

関数 式 のフーリエ係数を 式

関数 式 のフーリエ係数を 式 とする.

このとき，関数 式 のフーリエ係数は

式 となる.（ただし，c ，d は定数.）

この性質を**フーリエ係数の線形性**という.

●例題1

関数 $f(x)=\begin{cases} 1 & (0 \leq x < \pi) \\ 0 & (\pi \leq x < 2\pi) \end{cases}$ を

$f(x+2\pi)=f(x)$ によって周期的に拡張した関数 $f(x)$

をフーリエ級数展開せよ.

図

ヒント: $f(x)$ を奇関数部分 $f_o(x)$ と

偶関数部分 $f_e(x)$ に分け,

コツ（4）を駆使せよ.

●例題1（続き1）

解　$f(x)$ の奇関数部分を $f_o(x)$ と置くと, $f_o(x)$ は

式

を $f_o(x+2\pi)=f_o(x)$ によって周期的に拡張した関数である.

図

また, $f(x)$ の偶関数部分を $f_e(x)$ と置くと, $f_e(x)$ は

式

となる.

図

●例題1（続き2）

解 $f_o(x)$ のフーリエ系数 [式] は [式]

$f_o(x)$ のフーリエ系数 [式] は

[式]

$f_e(x)$ のフーリエ系数 [式] は

[式]

$f_e(x)$ のフーリエ系数 [式] は [式]

●例題1（続き3）

解　よって コツ（4） フーリエ係数の線形性より,

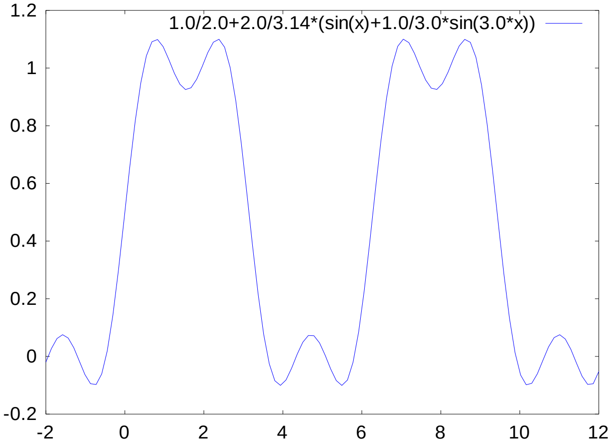
式

以上から関数 式 のフーリエ級数展開は

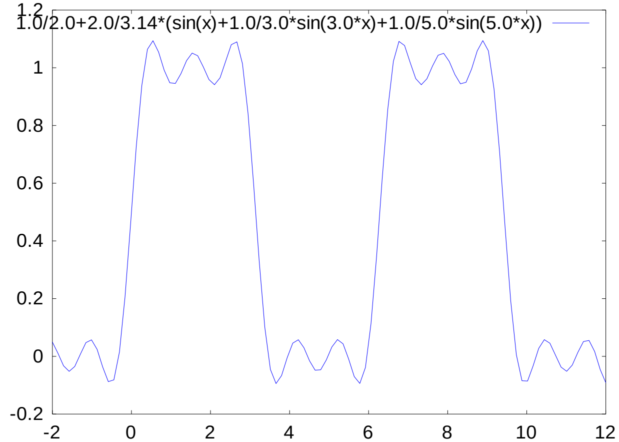
式

と求まる.

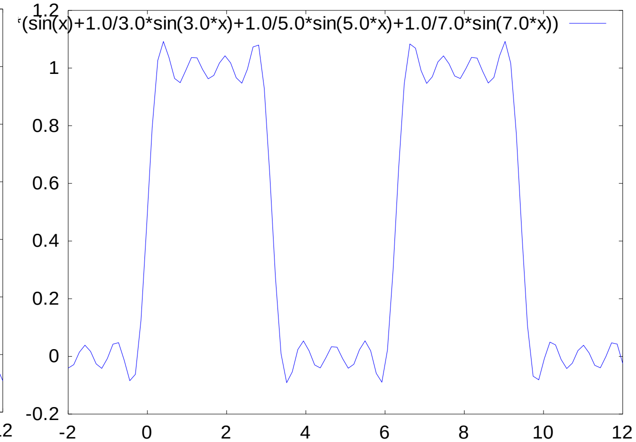
●例題１（続き４）



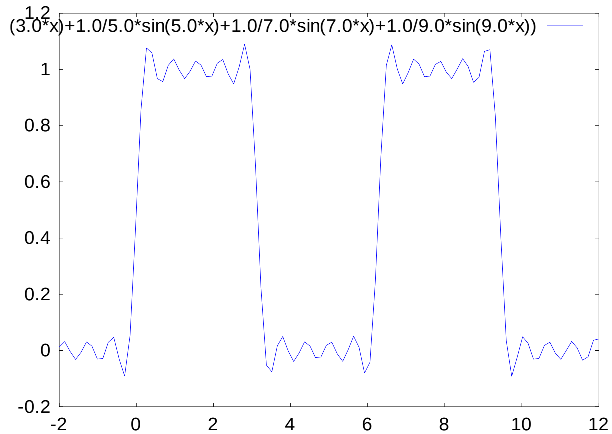
m=2



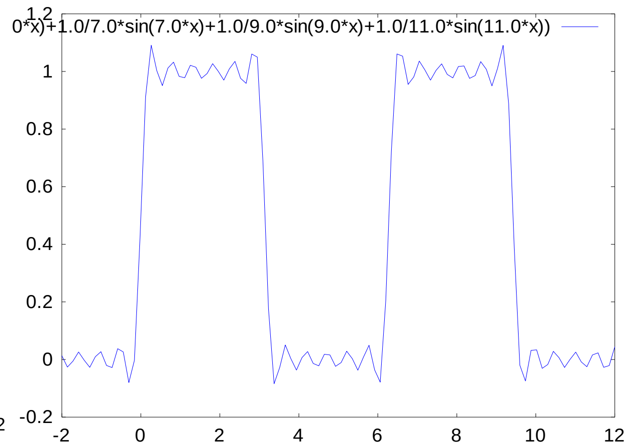
m=3



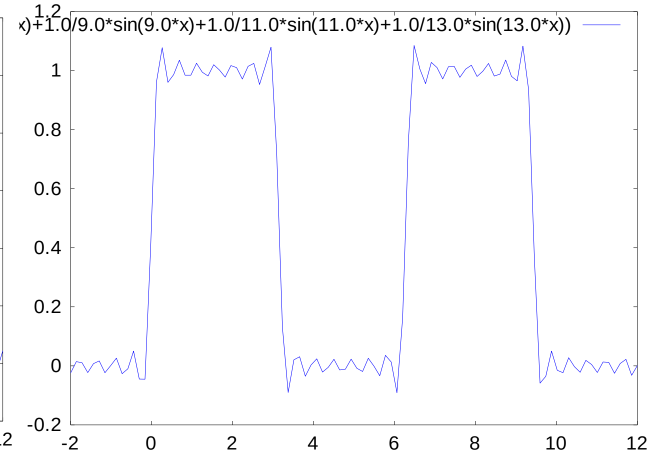
m=4



m=5



m=6



m=7

m=∞で元の関数 式 と等価になる.

●例題２

関数　$f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x < \pi)$ を
$f(x + 2\pi) = f(x)$ によって周期的に拡張した関数 $f(x)$
をフーリエ級数展開せよ.

図

ヒント: $f(x)$　は偶関数.

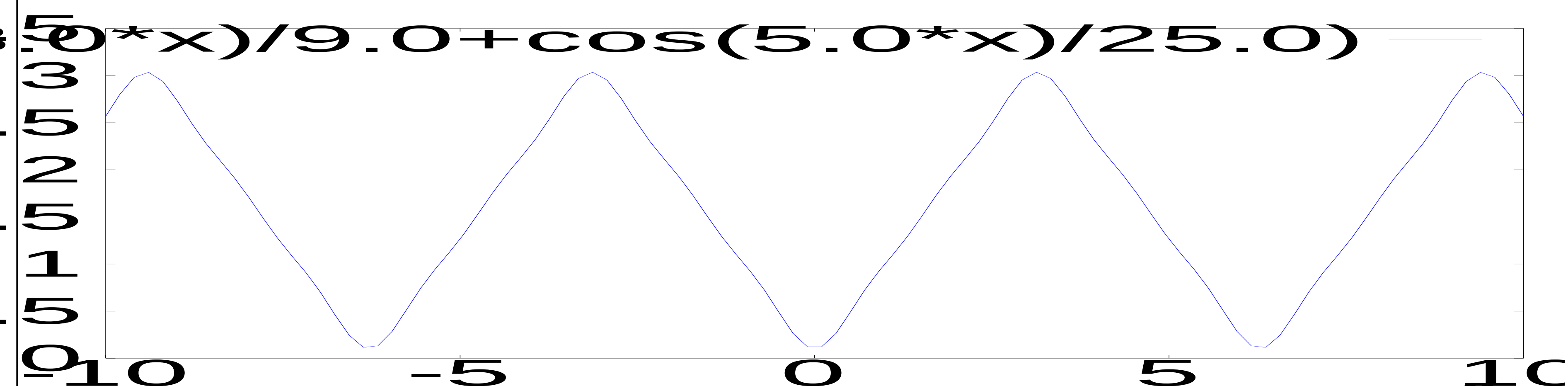
コツ（1）　より，　式　は考えなくても　式

●例題２（続き１）

解

●例題2（続き2）

解



m=3

●例題3

関数 $f(x) = x \qquad (-\pi \leq x < \pi)$ を

$f(x+2\pi) = f(x)$ によって周期的に拡張した関数 $f(x)$

をフーリエ級数展開せよ.

図

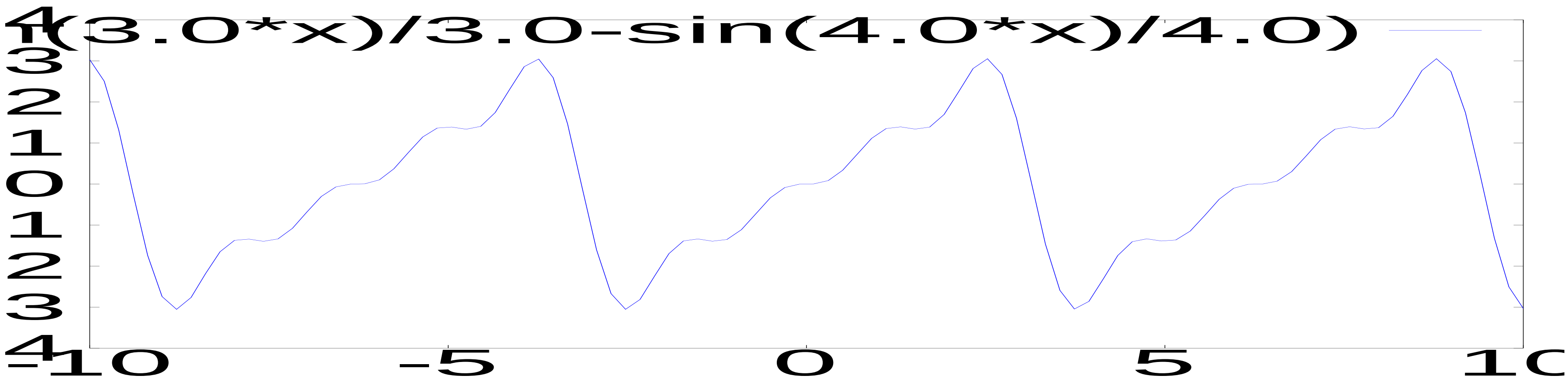
●例題３（続き１）

解

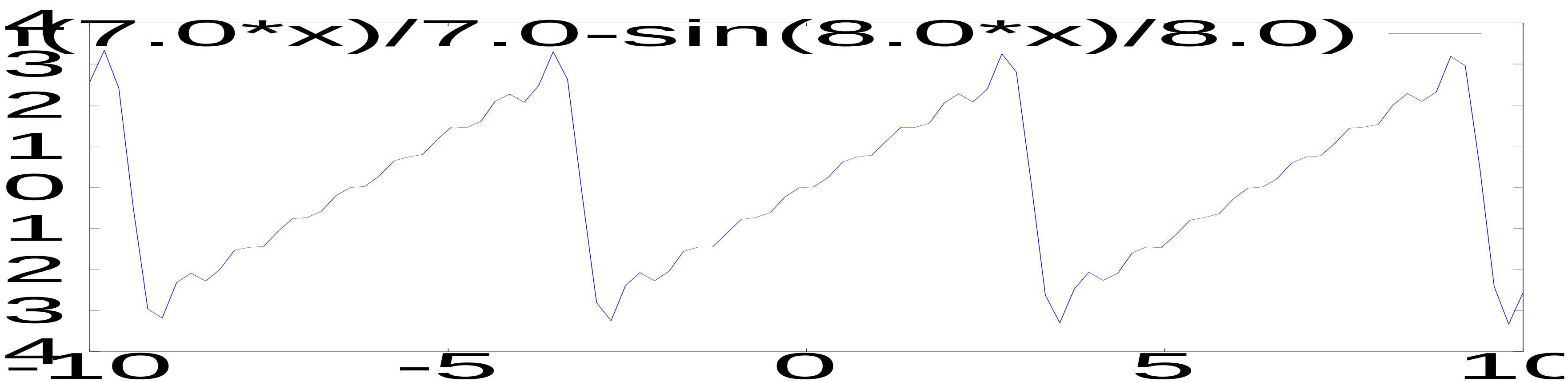
●例題3（続き2）

解

n=4



n=8



●一般の周期を持つ周期関数に対するフーリエ級数

関数　$f(x)$　を周期　$2L$　の周期関数とする.

この関数をフーリエ級数展開することを考える.

□考え方□

周期 2π の周期関数 の展開法ついてはもう知っている.

周期 $2L$ の周期関数　をスケール変換することで

周期 2π の周期関数 の関数に変換できる.

→

関数をスケール変換し, スケール変換した関数の級数展開を
スケール逆変換すればいい.

●スケール変換の方法

	変換前	変換後
周期	$2L$	2π
変数	x	t
関数	$f(x)$	$h(t)$

このとき x と t の間には次の関係がある.

式

導出法: $x = 2L$ のとき $t = 2\pi$ であるので

$x = a\,t$ とおいて a を求める

よって，関数 $f(x)$ をスケール変換して得られる

関数 $h(t) =$ 式 は周期 2π の周期関数となり

（次のページへ）

●スケール変換の方法2

式 $h(t) =$

とフーリエ級数展開できる.

t を変数 x に戻すと 式 $f(x) =$ により,

式 $f(x) =$

となる.

一方フーリエ係数は

式

●例題1（一般の周期関数）

関数 $f(x) = x \qquad (-2 \leq x < 2)$ を

$f(x+4) = f(x)$ によって周期的に拡張した関数 $f(x)$

をフーリエ級数展開せよ.

解

解（の続き）

●例題2（一般の周期関数）

関数 $f(x) = \cos(x) \ \ (-4 \leq x < 4)$を

$f(x+8) = f(x)$ によって周期的に拡張した関数 $f(x)$

をフーリエ級数展開せよ.

解

解（の続き）

●これからの流れ

1. 複素フーリエ級数

実は，フーリエ係数こそが波のスペクトルをあらわす．
すなわち，フーリエ変換されたモノである．
しかし a_n と b_n と言う様に二つもあっては困る．
よって，一つの係数に統一する．

2. 離散フーリエ変換

複素フーリエ係数こそが離散フーリエ変換されたモノ．

3. 連続フーリエ変換

n が整数ではなく，実数を取る場合を考える．

●オイラーの公式

オイラーの公式 $$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)}$$

電気系の本では，通常以下のような表記を行うが，

$$\varepsilon^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

物理・数学系の本では

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

とすることが多い．本稿では，**引き続き**物理・数学系の表記を取ることにする．
電気系の表記を取るときはその都度，注意を促す．

●ド・モアブル(de Moivre)の公式

オイラーの公式 $$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$ ---------- （1）

x に $-x$ を代入すると

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x)$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$$ -------------------------- （2）

式（1），（2）の和と差を取ることにより，

式

次の**ド・モアブル**の公式を得る.

$$\sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}, \quad \cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

●複素フーリエ級数

ド・モアブルの公式

$$\sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \ , \quad \cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

をフーリエ級数展開の式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

に代入すると，

式

となる，ここで，複素フーリエ係数を

式

と定義すると，次で与えられる**複素フーリエ級数**展開の式が得られる．

式（ここは小さい字で書いてね）

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

●複素フーリエ係数

フーリエ係数 $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \end{cases}$ を

$c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$ に代入すると,

式（3行）

複素フーリエ係数 $\boxed{c_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx}$ を得る.

複素フーリエ係数に対し，今までのフーリエ係数を
実フーリエ係数という.

●一般の周期の場合の複素フーリエ級数展開

周期 $2L$ の場合の複素フーリエ級数を考える.

$$f(x) \equiv h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$ とおくことができる.

（ t 座標の上では, 周期 2π であると考える. ）

xと t の間に $t = ax$ の関係があるとするなら

$2\pi = a \cdot 2L$ となり, $a = \dfrac{\pi}{L}$ と求まる.

よって $t = \dfrac{\pi}{L}x$ となり,

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(\pi/L)x}}$$

と**一般の周期の場合の複素フーリエ級数**展開の式が得られる.

●一般の周期の場合の複素フーリエ係数

同様に周期 $2L$ の場合の複素フーリエ級数を考える.

座標 t 上において複素フーリエ級数を以下のように置くと,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)e^{-int}dt$$ が成り立つ.

$$t = \frac{\pi}{L}x$$ 及び $$dt = \frac{\pi}{L}dx$$ より,

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in(\pi/L)x}dx}$$

と**一般の周期の場合の複素フーリエ係数**が得られる.

●離散フーリエ変換

$f(x)$ が周期 $2L$ の周期関数とするとき，
その，**離散フーリエ変換**は次で与えられる．

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in(\pi/L)x}dx}$$

「複素フーリエ係数の式」

理工学では，c_n を**スペクトル**(SPECTRUM)と呼ぶ．

c_n を求めることを $f(x)$ の**スペクトルを調べる**とか，$f(x)$ を**スペクトルに分解する**とか言う．

逆フーリエ変換は次の式で与えられる．

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(\pi/L)x}}$$

「複素フーリエ級数展開の式」

離散でない場合や周期関数でない場合は**連続フーリエ変換**を使う

●例題(逆変換の確認)

離散逆フーリエ変換: $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(\pi/L)x}$$

を離散フーリエ変換: $$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in(\pi/L)x}dx$$

すると元に戻ることを確認せよ.

解

●演習問題1

周期関数 $f(x)$ が偶関数であれば，その複素フーリエ係数 c_n
は実数となることを示せ，また，奇関数であれば純虚数となることを示せ．

解

●演習問題2

ド・モアブルの公式を利用して，次の複素フーリエ級数展開を求めよ.

（1）$\cos^3(x)$　　（2）$\sin^4(x)$

解　（1）$\cos(nx) = \dfrac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$ より

（2）$\sin(nx) = \dfrac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$ より

●演習問題（フーリエ積分公式の導出1）

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{L}^{L} f(y)e^{-in\pi y/L}dy \quad \text{……………………} \quad （1）$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \quad \text{……………………} \quad （2）$$

式（1）に式（2）を代入することで，

フーリエ積分公式 $\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega(y-x)}dy}$ を求めよ.

解

●演習問題（フーリエ積分公式の導出2）

解

●フーリエ変換（まずはフーリエ積分公式）

フーリエ積分公式
これまで非周期関数とは周期関数の周期　T を $T \to \infty$
とした極限であることを確認した.

ここからは, 周期　T の周期関数に対する離散フーリエ変換が　$T \to \infty$
でどのようになるかを考察し, 非周期関数に対するフーリエ変換を導入する.

周期　$T = 2L$ の周期関数 $f(x)$ を考える.
関数 $f(x)$ が複素フーリエ級数に展開できるとすると

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)e^{-in\pi y/L}dy \qquad \text{（１）}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \qquad \text{（２）}$$

式（１）に式（２）を代入すると,

フーリエ積分公式 $\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega(y-x)}dy}$ が得られる

右辺を関数 $f(x)$ に対するフーリエ積分表示と呼ぶ.

●離散フーリエ変換の復習

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in(\pi/L)x}dx$$

$$f(x) \rightleftarrows c_n$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(\pi/L)x}$$

フーリエ係数 c_n を求めること(離散フーリエ変換すること)は
周期関数 $f(x)$ をフーリエ係数 c_n の組みに変換することであり,
逆にフーリエ係数 c_n から$f(x)$を求めること(離散逆フーリエ変換すること)は
はこの変換の逆変換を行うことである.

このような立場から, **フーリエ積分公式**を次のページのように
置き直すことができる

●（連続）フーリエ変換

フーリエ積分公式 $$f(x)=\underline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}}\,\underline{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-i\omega(y-x)}dy$$

を次のように置き換える.

$$f(x)=\underline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}}F(\omega)e^{i\omega x}\underline{d\omega} \qquad F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-i\omega y}dy$$

関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ のフーリエ変換（Fourier transform）
関数 $f(x)$ を関数 $F(\omega)$ のフーリエ逆変換（Fourier inverse transform）という

以下，フーリエ変換を行う写像を $\mathcal{F}$ であらわすことにする.

$$\mathcal{F}[f(x)]=F(\omega)$$

また，$\mathcal{F}$ の逆写像であるフーリエ逆変換を $\mathcal{F}^{-1}$ であらわす.

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=f(x)$$

●（連続）フーリエ変換ー2

フーリエ変換とフーリエ逆変換の公式の対称性を良くするために

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \qquad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y}dy$$

フーリエ逆変換の式の右辺の積分係数 $\frac{1}{2\pi}$ を $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ に改め
その代わりにフーリエ変換の式の右辺に $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ を掛けても良い．
つまり，

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \qquad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y}dy$$

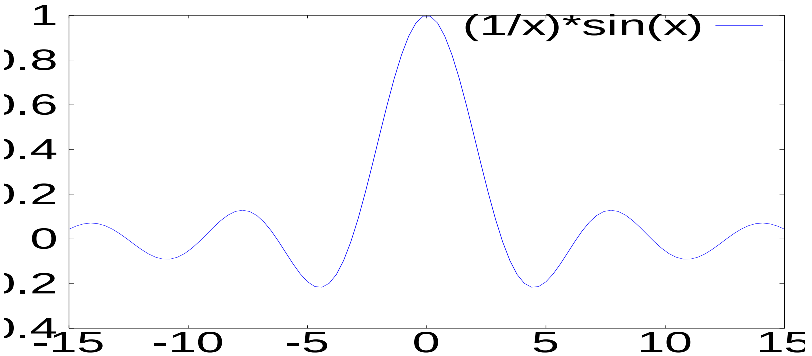
としても良い．上のペアを使うかしたのペアを使うかは
本や論文によって異なるから注意を要する．
本講義では，上のペアを用いることにする．

●演習1

次の非周期関数をフーリエ変換せよ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2d} & (|x| \le d) \\ 0 & (|x| > d) \end{cases}$$

解



●演習２

次の非周期関数をフーリエ変換せよ

$$f(x) = e^{-a|x|} \qquad (a > 0)$$

解